**UNIVERSITE DE BATNA_2**

**SERIE DE TD N° 5**

**FACULTE DE MEDECINE**

**DE BIOSTATISTIQUES**

**1ère Année Médecine, 2020/2021**

# *Variables Aléatoires*

***Exercice n° 01 :***

On lance un dé équilibré. Soit $X$ le résultat obtenu.

1. Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Et calculer sa fonction de répartition ?
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire de Y = X + 2 ? Même question pour la variable aléatoire Z = X².
4. Calculer l'espérance et la variance des V.A de la question précédente.

***Solution :***

Le lancement d'un dé équilibré va, à chaque fois, révéler une face de l'ensemble {1,2,…,6}.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1 |
| $F(x_i) = P(X \leq x_i)$ | 1/6 | 2/6 | 3/6 | 4/6 | 5/6 | 1 | |
| $p_i x_i$ | 1/6 | 2/6 | 3/6 | 4/6 | 5/6 | 6/6 | E(X) = 21/6 = 3.5 |
| $p_i x_i^2 = p_i z_i$ | 1/6 | 4/6 | 9/6 | 16/6 | 25/6 | 36/6 | E(X²) = 91/6 |
| $y_i = x_i + 2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| $p_i y_i$ | 3/6 | 4/6 | 5/6 | 6/6 | 7/6 | 8/6 | E(Y) = 33/6 = 5.5 |
| $z_i = x_i^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | |
| $p_i x_i^4 = p_i z_i^2$ | 1/6 | 16/6 | 81/6 | 256/6 | 625/6 | 1296/6 | E(Z²) = E(X⁴) = 2275/6 |

1) Calcul de la loi de probabilité de la variable aléatoire X et sa fonction de répartition :
Chaque résultat du Dé a la même probabilité d'apparition. On est donc en présence d'une loi uniforme sur l'ensemble {1 , 2 , … , 6} dont les probabilités sont données dans le tableau ci-dessus par $\mathbf{p_i = P(X = x_i)} = \frac{1}{6}$ pour tout i = 1 ,..., 6.
La fonction de répartition de X est donnée par $\mathbf{F(x_i)} = P(X \leq x_i)$ dans le tableau ci-dessus.
2) En appliquant les définitions on obtient :
L'espérance mathématique de X, donnée dans le tableau ci-dessus par la formule :
$E(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$
La variance de la variable aléatoire X est donnée par la formule :
$V(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i^2}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2 + \frac{11}{12} \cong 2.9166667$
3) Détermination des lois de probabilité des variables aléatoires Y = X + 2 et Z = X².
Les lois des variables aléatoires Y et Z obtenues à partir de la variable aléatoire X initiale (résultat du lancer d'un Dé équilibré) par les relations [Y = X + 2] et [Z = X²] sont également uniformes sur des ensembles finis {3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8} et {1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36} respectivement. Ces lois sont les suivantes : $p_i = 1/6$, $\forall\, i = \overline{1,6}$.
4) Soit la variable aléatoire Y = X + 2, elle est le translaté de X de 2 unités vers la droite.

Son espérance sera donc translatée elle aussi de 2 unités vers la droite ; on aura donc l'espérance mathématique $E(Y) = E(X + 2) = E(X) + 2 = \frac{11}{2} = 5.5$

Par contre la variabilité de Y sera nécessairement identique à celle de X, vu qu'une translation ne changera en aucune façon les écarts entre les différentes valeurs possibles pour Y ; on obtient donc la variance $V(Y) = V(X + 2) = V(X) = \frac{35}{12} \cong 2.9166667$

Pour $Z = X^2$, la situation est différente. Tout d'abord le calcul de l'espérance n'est pas donné par une transformation simple de l'espérance de X et nécessite de revenir à la loi de X.

Pour ce faire on peut soit reprendre le résultat donné au point précédent, (tableau ci-dessus : $E(Z) = E(X^2) = 91/6 = 15 + \frac{1}{6}$), soit utiliser la manipulation :

$$E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = \frac{35}{12} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6}.$$

La variance $V(Z) = V(X^2)$, elle sera sérieusement augmentée vu que Z est clairement plus volatile que X. Cette intuition est confirmée par les calculs donnés dans le tableau ci-dessus :

$$V(X^2) = E(X^4) - [E(X^2)]^2 = \frac{2275}{6} - \left(\frac{91}{6}\right)^2 = 149 + \frac{5}{36} \cong 149.13889$$

***Exercice n° 02 :***

On définit la loi de la variable aléatoire X comme suit :

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.2 & pour\ x = 0 \\ mx & pour\ x = 1\ ou\ 2 \\ 2m\left(3 - \frac{x}{2}\right) & pour\ x = 3\ ou\ 4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Calculer m
2. Trouver F(X).
3. Calculer E(X) et V(X).
4. Calculer P (X = 3).

***Solution :***

La variable aléatoire X est une quantité discrète.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | 0.2 | m | 2m | 3m | 2m | 8m+0.2=1 |
| $F(x_i) = P(X \leq x_i)$ | 0.2 | m+0.2 | 3m+0.2 | 6m+0.2 | 8m+0.2=1 | |
| $p_i x_i$ | 0 | m | 4m | 9m | 8m | 22m |
| $p_i x_i^2$ | 0 | m | 8m | 27m | 32m | 68m |

1) Calcul de m : $\sum p_i = 8m + 0.2 = 1 \Rightarrow m = \frac{1-0.2}{8} = 0.1$
2) Calcul de la fonction de répartition F(x)

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(x_i) = P(X \leq x_i)$ | 0.2 | 0.3 | 0.5 | 0.8 | 1 |

3) Calcul de $E(X) = 22\,m = 22 * 0.1 = 2.2$ ; $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 68*0.1 - 2.2^2 = 1.96$
4) Calcul de $P(X = 3) = 3m = 0.3$
   *Autre méthode* : $F(3) - F(2) = [6m+0.2] - [3m+0.2] = 3m = 0.3$

***Exercice n° 03 :***

Dans un service hospitalier, sont admis 12 malades atteints de cancer, dont 05 porteurs d'un cancer bronchique et 07 présentant un cancer digestif.

On procède à un transfert de 06 malades vers une structure spécialisée en vue d'un traitement chirurgical. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de malades transférés atteints d'un cancer digestif :

1. Etablir la loi de probabilité de X.
2. Déterminer F(X).
3. Calculer E(X) et V(X).
4. Trouver P(X < 5).

***Solution :***

On a 12 cancéreux où 5 avec un cancer bronchique et 7 avec un cancer digestif. On prend 6 cancéreux au hasard de ces 12 et on note par X la variable aléatoire donnant les cancéreux digestifs à transférer au service spécialisé. Le nombre de cas possibles qu'il y a de tirer 6 cancéreux parmi 12 est $C_{12}^{6} = 924$ cas différents.

Les évènements à considérer (tirage de 6 cancéreux) sont les suivants (notons par B cancer bronchique et par D cancer digestif) ⇒ Les 6 cancéreux pris au hasard peuvent être : [6D ∩ 0B] ∪ [5D ∩ 1B] ∪ [4D ∩ 2B] ∪ [3D ∩ 3B] ∪ [2D ∩ 4B] ∪ [1D ∩ 5B], c'est-à-dire le nombre de cas favorables réalisant les évènements ci-dessus sont :

$C_7^6 * C_5^0 = 7$ $\quad C_7^5 * C_5^1 = 105$ $\quad C_7^4 * C_5^2 = 350$ $\quad C_7^3 * C_5^3 = 350$ $\quad C_7^2 * C_5^4 = 105$ $\quad C_7^1 * C_5^5 = 7$

1) La loi de probabilité de X sera donnée dans la 2ème ligne du tableau suivant :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{7}{924}$ | $\frac{105}{924}$ | $\frac{350}{924}$ | $\frac{350}{924}$ | $\frac{105}{924}$ | $\frac{7}{924}$ | $\frac{924}{924} = 1$ |
| $F(x_i)$ | $\frac{7}{924}$ | $\frac{112}{924}$ | $\frac{462}{924}$ | $\frac{812}{924}$ | $\frac{917}{924}$ | $\frac{924}{924} = 1$ | |
| $p_i x_i$ | $\frac{7}{924}$ | $\frac{210}{924}$ | $\frac{1050}{924}$ | $\frac{1400}{924}$ | $\frac{525}{924}$ | $\frac{42}{924}$ | $E(X) = \frac{3234}{924} = \mathbf{3.5}$ |
| $p_i x_i^2$ | $\frac{7}{924}$ | $\frac{420}{924}$ | $\frac{3150}{924}$ | $\frac{5600}{924}$ | $\frac{2625}{924}$ | $\frac{252}{924}$ | $E(X^2) = \frac{12054}{924} = \frac{2009}{154}$ |

2) La fonction de répartition **$F(x_i)$** est donnée dans le tableau ci-dessus.
3) L'espérance de X est : $E(X) = \sum p_i x_i = 3.5$
   La variance de X est : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2009}{154} - 3.5^2 = \frac{35}{44} \cong 0.7955$
4) Calcul $P(X < 5) = F(4) = \frac{812}{924} = \frac{29}{33} \cong 87.88$ %

***<u>Exercice n° 04 :</u>***

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité : $f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

1. Calculer la valeur de c ?
2. Déterminer la fonction de répartition de X ?
3. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire en question.

***Solution :***

*D'après les propriétés de la fonction de densité :*

L'intégrale de la fonction de densité sur l'ensemble R est $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

On sait également que la fonction de densité doit être positive ∀ x ∈ ]– ∞ ; + ∞[.

Et enfin on doit avoir $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

1) On a $f(x) = c * (1 - x^2)$ ; c étant une constante ; f(x) est définie dans l'intervalle $-1 < x < +1$.

La dérivée de f(x) est : $f'(x) = c * (-2x)$ et elle s'annule au point x = 0 et la valeur de la fonction f au point x = 0 est f (0) = c. Les 2 racines de l'équation f(x) = 0 sont –1 et +1. Pour que la fonction f(x) soit une densité il faut que l'intégrale de la fonction f(x) entre –1 et +1 soit égale à l'unité.

$$\int_{-1}^{+1} c(1-x^2)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad c * \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 \Rightarrow c = +\frac{3}{4}$$

2) Calcul de la fonction de répartition : F(x) = P(X < x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Si x∈ ]– ∞ ; – 1] → F(x) = $\int_{-\infty}^{x} 0 * dt = 0$

- Si x∈ ]– 1 ; +1] → F(x) = $\int_{-1}^{x} 0.75\,(1-t^2)dt = 0.75 * [t - \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^{x} = \frac{3x}{4} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2}$
- Où F (–1) = 0 et F(1) = 1.

La fonction de répartition étant la suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -1 \\ \frac{3x}{4} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2} & si\ x \in ]-1\,;+1] \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

3) Calcul de l'Espérance mathématique de X.

E(X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)dx = 0.75 * \int_{-1}^{+1} x * (1-x^2)dx = 0.75 * \Big|\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{+1} = 0$

La variance de X est : V(X) = E(X²) – [E(X)]² = $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f(x)dx$ – [E(X)]² =

V(X) = $0.75 * \int_{-1}^{+1} x^2 * (1-x^2)dx - 0 = 0.75 * \Big|\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{5}$

***Exercice n° 05 :***

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} a & x \le -1 \\ bx + c & -1 < x < 1 \\ d & x \ge 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de $a, b, c\ et\ d$ telle que F soit une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition F.
3. Déterminer la densité de probabilité associée à la fonction de répartition F.

## ***Solution***

On sait que la fonction de répartition F(x) doit être positive croissante et continue avec $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

1) Détermination des constantes a, b, c et d

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} a = a = 0$   $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} d = d = 1$

Pour que F soit continue, il faut qu'elle le soit sur chaque morceau et aux extrémités des intervalles de définition ; c'est-à-dire on doit avoir :

x → F(x) = b * x + c continue ↔ $\lim_{x \to -1} F(x)$ = – b + c = F (– 1) = 0

$\lim_{x \to +1} F(x) = b + c = F(1) = 1$ ; On obtient donc 2 équations à 2 inconnues

$\begin{cases} c - b = 0 \\ c + b = 1 \end{cases}$ → b = c = $\frac{1}{2}$

Il faut que F soit croissante et continue sur chaque intervalle de définition, alors :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x \le -1 \\ \frac{1}{2} * (x+1) & si & -1 < x < 1 \\ 1 & si & x \ge 1 \end{cases}$$

2) Représentation graphique de la fonction de répartition F(x).

3) La densité de probabilité f(x) = F'(x) = $\begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$