UNIVERSITE DE BATNA_2 **FACULTE DE MEDECINE**

SERIE DE TD N° 6 ***en BIOSTATISTIQUE 2019/2020***

Exercices sur les Tests du Khi-Deux

Exercice 1 :

Dans un groupe de 200 malades atteints du cancer du col de l'utérus, un traitement par application locale du radium a donné 50 guérisons.

Un autre groupe de 150 sujets atteints de la même maladie a été traité par chirurgie, on a trouvé 54 guérisons. Que peut-on dire sur l'équivalence des deux traitements ?

On prendra un risque α = 5%.

Solution de l'exercice 1 : **Test du Khi-Deux d'homogénéité**

- *Formulation des hypothèses* :

  $\boldsymbol{H_0}$: « Les deux traitements sont équivalents » ; **contre**
  $\boldsymbol{H_1}$: « Les deux traitements ne sont pas équivalents ».
- *Calcul de la statistique de test* : To = $\chi^2_{(observé)}$

	Guéris		Non guéris		Total
Radium	50	59.4	150	140.6	200
Chirurgie	54	44.6	96	105.4	150
Total	104		246		350

$$\chi^2_{(observé)} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(E\,O_i - E\,t_i)^2}{E\,t_i} = \frac{(50-59.4)^2}{59.4} + \frac{(54-44.6)^2}{44.6} + \frac{(150-140.6)^2}{140.6} + \frac{(96-105.4)^2}{105.4} = 4.97154$$

- *Le seuil critique* : Le tableau de contingence a 2 lignes et 2 colonnes donc le nombre de degré de liberté = 1 $\Rightarrow$ $\chi^2_{(1)}$ **= 3.84** ; si To > $\chi^2_{(1)}$ alors on ne peut pas accepter H_0.

- *Décision* : comme on a $\chi^2_{(observé)}$ **= 4.98** = To > $\chi^2_{(1)}$ **= 3.84** alors il y a **Rejet de H_0.**

Exercice 2 :

On veut savoir si la réussite (R) d'un traitement est indépendante du niveau de la tension artérielle du malade (T). On dispose pour cela de 250 observations réparties comme suit :

T \ R	échec	Succès
Basse	21	104
Elevée	29	96

La réussite du traitement dépend-elle du niveau de la tension artérielle ?

On prendra un risque α = 5 %.

Solution de l'exercice 2 : **Test du Khi-Deux d'indépendance**

- *Formulation des hypothèses* :

  $\mathbf{H_0}$: « la réussite est indépendante de la tension artérielle » **contre**

  $\mathbf{H_1}$: « la réussite n'est pas indépendante de la tension artérielle ».

- *Calcul de la statistique de test* : To = $\chi^2_{(observé)}$

$$\chi^2_{(observé)} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(E\,O_i - E\,t_i)^2}{E\,t_i} = \frac{(21-25)^2}{25} + \frac{(29-25)^2}{25} + \frac{(104-100)^2}{100} + \frac{(96-100)^2}{100} = 1.6 = \text{To}.$$

- *Le seuil critique* : Le tableau de contingence a 2 lignes et 2 colonnes donc le nombre de degré de liberté = 1 ⇒ $\chi^2_{(1)}$ **= 3.84** ; si To > $\chi^2_{(1)}$ alors on ne peut pas accepter H_0.

T \ R	Echec		Succès		Total
Basse	21	25	104	100	125
Elevée	29	25	96	100	125
Total	50		200		250

- *Décision* : comme on a $\chi^2_{(observé)}$ **= 1.6** = To < $\chi^2_{(1)}$ **= 3.84** alors on ne peut pas **Rejeter H_0** au risque de 5 %**.**

Exercice 3 :

On souhaite évaluer l'effet éventuel de différentes psychothérapies sur la phobie sociale. On sait que dans une population particulière de patients atteints de la phobie sociale, on a la distribution suivante (les patients sont classés en trois niveaux de phobie sociale, le niveau 1 étant le plus faible et le niveau 3 le plus marqué).

Niveau de la phobie	Niveau1	Niveau 2	Niveau 3
proportion	30%	40%	30%

200 patients tirés au sort dans cette population ont suivi une thérapie cognitive-comportementales. Les résultats post-traitement sont les suivants :

Niveau de la phobie	Niveau1	Niveau 2	Niveau 3
effectif	120	50	30

Que peut-on conclure ? On prendra un risque α = 5 %.

Solution de l'exercice 3 : Test du Khi-Deux d'adéquation ou de conformité

- *Formulation des hypothèses* :

H_0 : « La distribution des niveaux de la phobie sociale de l'échantillon des 200 personnes est conforme à la distribution théorique de la population » ; **contre**

H_1 : « La distribution des niveaux de la phobie de l'échantillon n'est pas conforme à celle de la population (c'est-à-dire il y a un effet sur la phobie sociale) ».

- *Calcul de la statistique de test* : To = $\chi^2_{(observé)}$

$$\chi^2_{(observé)} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(E\,O_i - E\,t_i)^2}{E\,t_i} = \frac{(120-60)^2}{60} + \frac{(50-80)^2}{80} + \frac{(30-60)^2}{60} = 86.25$$

Phobie	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Total
Proportion %	30	40	30	100
Effectif observé	120	50	30	200
Effectif théorique	60	80	60	200

- *Le seuil critique* : Le nombre de degré de liberté = n – 1 = 2 ⇒ $\chi^2_{(2)}$ **= 5.99** ; si To > $\chi^2_{(2)}$ alors on ne peut pas accepter H_0.

- *Décision* : comme on a $\chi^2_{(observé)}$ **= 86.25** = To > $\chi^2_{(2)}$ **= 5.99** alors il y a **Rejet de H_0.**

Exercice 4 :

On désire tester l'effet d'une antibiothérapie systématique sur l'apparition d'une infection post-opératoire. Une expérience randomisée est conduite. Un premier groupe de patients reçoit une antibiothérapie. Un deuxième groupe reçoit un placebo. Les résultats sont les suivants :

	Antibiothérapie	Placébo
Infection	10	29
Pas d'infection	75	27

L'antibiothérapie est-elle efficace dans la prévention des applications infectieuses ?

On prendra un risque α = 5 %.

Solution de l'exercice 4 :

I) Test du Khi-Deux d'homogénéité

- *Formulation des hypothèses* :

H_0 : « L'antibiothérapie et le placebo ont le même effet sur l'apparition d'une infection post-opératoire ; **contre**

H_1 : « L'antibiothérapie et le placebo n'ont pas le même effet sur l'apparition d'une infection post-opératoire ».

- *Calcul de la statistique de test observé* : To = $\chi^2_{(observé)}$

$$\chi^2_{(observé)} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(E\,O_i - E\,t_i)^2}{E\,t_i} = \frac{(10-23.5)^2}{23.5} + \frac{(75-61.5)^2}{61.5} + \frac{(29-15.5)^2}{15.5} + \frac{(27-40.5)^2}{40.5} = 26.9768$$

	antibiothérapie		Placébo		Total
Infection	10	23.5	29	15.5	39
Non infection	75	61.5	27	40.5	102
Total	85		56		141

- *Le seuil critique* : Le tableau de contingence a 2 lignes et 2 colonnes donc le nombre de degré de liberté = 1 ⇒ $\chi^2_{(1)}$ **= 3.84** ; si To > $\chi^2_{(1)}$ alors on ne peut pas accepter H_0.

- *Décision* : comme on a $\chi^2_{(observé)}$ **= 26.9768** = To > $\chi^2_{(2)}$ **= 5.99** alors il y a **Rejet de H_0.**

II) Pour démontrer l'efficacité de l'antibiothérapie, il faut faire un test unilatéral droit de comparaison de deux fréquences f_1 et f_2 (égal contre supérieur), car la question posée est : L'antibiothérapie est-elle efficace dans la prévention des infections ?

La fréquence des non infectés en utilisant l'antibiothérapie est : $f_1 = \frac{75}{85} = 0.882352941$

La fréquence des non infectés en utilisant le placébo est : $f_2 = \frac{27}{56} = 0.482142857$

La fréquence commune est $f_0 = \frac{n_1 f_1 + n_1 f_1}{n_1 + n_2} = \frac{75+27}{85+56} = \frac{102}{141} = 0.723404255$

Formulation des hypothèses :

H_0 : $\{p_1 - p_2 = 0\}$ ou $\{p_1 = p_2\}$; contre **H_1** : $\{p_1 - p_2 > 0\}$ ou $\{p_1 > p_2\}$

Le seuil critique : $u_{0.05} = +\,1.645$ ⇒ si To > SC ⇒ on ne peut pas accepter H_0.

Calcul de la statistique de test observé :

$$\text{To} = \frac{(f_1 - f_2)}{\sqrt{f_0\,(1-f_0)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(0.88235 - 0.48214)}{\sqrt{0.7234(1-0.7234)(85^{-1}+56^{-1})}} = 5.198387748 \approx +\,5.198$$

Décision : comme To = + 5.198 > $u_{0.05}$ = + 1.645. On ne peut pas accepter H_0 (les observations disponibles montrent une différence significative entre les proportions p_1 et p_2 (c'est-à-dire $p_1 > p_2$) au risque de 5 %).

Exercice 5 :

De nombreuses observations cliniques ont montré que jusque-là :

- 30% des malades atteints de M ont une survie inférieure à un an
- 50% ont une survie entre un an et deux ans.
- 10% ont une survie entre deux ans et cinq ans.
- 10% ont une survie supérieure à cinq ans.

On applique un nouveau traitement à 80 malades atteints de la maladie M et on constate :

- 12 ont une survie inférieure à un an
- 56 ont une survie entre un an et deux ans.
- 8 ont une survie entre deux ans et cinq ans.
- 4 ont une survie supérieure à cinq ans.

Peut-on dire que la thérapie a un effet ? On prendra un risque α = 5 %.

Solution de l'exercice 5 : **Test du Khi-Deux d'adéquation ou de conformité**

- *Formulation des hypothèses* :

  H_0 : La distribution de l'échantillon des 80 personnes est conforme à celle de la population (c'est-à-dire cet échantillon est représentatif de la population) ; **contre**

  H_1 : L'échantillon n'est pas représentatif de la population.

- *Calcul de la statistique de test* : To = $\chi^2_{(observé)}$

$$\chi^2_{(observé)} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(E\,O_i - E\,t_i)^2}{E\,t_i} = \frac{(12-24)^2}{24} + \frac{(56-40)^2}{40} + \frac{(8-8)^2}{8} + \frac{(4-8)^2}{8} = 14.4$$

x_i	< 1 an	Entre 1 et 2	Entre 2 et 5	> 5 ans	Total
Proportion %	30	50	10	10	100
Effectif observé	12	56	8	4	80
Effectif théorique	24	40	8	8	80
$\chi^2_{(observé)}$	6	6.4	0	2	14.4

- *Le seuil critique* : Le nombre de degré de liberté = n – 1 = 3 ⇒ $\chi^2_{(3)}$ **= 7.81** ;

  Si To > $\chi^2_{(2)}$ alors on ne peut pas accepter H_0.

- *Décision* : comme on a $\chi^2_{(observé)}$ **= 14.4** = To > $\chi^2_{(3)}$ **= 7.81** alors il y a **Rejet de H_0.**

Exercice 6 :

Dans une université où les initiatives pédagogiques différenciées sont vivement encouragées, trois groupes de professeurs ont mis au point trois méthodes différentes d'apprentissage de bio statistique qu'on a appliqué à trois échantillons d'étudiants ayant le même niveau initial. A l'examen, les résultats furent les suivants :

Observé	Admis	Ajournés
Méthode 1	51	29
Méthode 2	38	12
Méthode 3	86	31

Peut-on affirmer que l'une des trois méthodes est plus efficace que les autres en termes de réussite à l'examen ? On prendra un risque α = 5 %.

__Solution de l'exercice 6__ **: Test du Khi-Deux d'homogénéité**

- *__Formulation des hypothèses__* :

  H_0 : Les trois méthodes sont équivalentes ; **contre**

  H_1 : L'une au moins des trois méthodes est plus efficace.

- *__Calcul de la statistique de test__* : To = $\chi^2_{(observé)}$

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{(E\,O_i - E\,t_i)^2}{E\,t_i} = \frac{(51-56.7)^2}{56.7} + \frac{(38-35.4)^2}{35.4} + \frac{(86-82.9)^2}{82.9} + \frac{(29-23.3)^2}{23.3} + \frac{(12-14.6)^2}{14.6} + \frac{(31-34.1)^2}{34.1} = 3.019$$

	Admis		ajournés		Total
Méthode 1	51	56.7	29	23.3	80
Méthode 2	38	35.4	12	14.6	50
Méthode 3	86	82.9	31	34.1	117
total	175		72		247

- *__Le seuil critique__* : Le tableau de contingence a 3 lignes et 2 colonnes donc le nombre de degré de liberté = 2 $*$ 1 = 2 $\Rightarrow$ $\chi^2_{(2)}$ **= 5.99** ; si To > $\chi^2_{(2)}$ alors on ne peut pas accepter H_0.

- *__Décision__* : Comme on a $\chi^2_{(observé)}$ **= 3.019** = To < $\chi^2_{(2)}$ **= 5.99** alors on ne peut pas **Rejeter H_0** au risque de 5 %.