UNIVERSITE DE BATNA_2 **FACULTE DE MEDECINE**

SERIE DE TD N° 6 *en BIOSTATISTIQUE 2019/2020*

Exercices sur les Variables Aléatoires

Exercice n° 01 :

Soit la variable aléatoire X finie ; dont la loi est définie par P (X = x) = $\frac{x^2+1}{18}$, pour x = 0 , 1 , 2 , 3.

1. Calculer la loi de probabilité de X.
2. Représenter graphiquement la loi de X.
3. Calculer E (X) et σ^2 (X).
4. Calculer la fonction de répartition F (x) de la variable aléatoire X.
5. Tracer le graphe de la fonction de répartition F (x).
6. Calculer les probabilités :

a. P (X = 4) , b. P (X ≤ 1) , c. P (2 ≤ X < 4) , d. P (X < 2)

Solution :

1. La loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	1/18	2/18	5/18	10/18	1
$p_i x_i$	0	2/18	10/18	30/18	42/18 = 7/3
$p_i x_i^2$	0	2/18	20/18	90/18	112/18 = 56/9
F(x) = P(X ≤ x_i)	1/18	3/18	8/18	1	

2. La représentation graphique est un diagramme en bâtons
3. E(X) = 7/3 (Voir tableau ci-dessus) $\sigma^2(X) = E(X^2) – [E(X)]^2 = 56/9 – (7/3)^2 = 7/9$
4. La fonction de répartition F(x) est : (voir tableau ci-dessus)
5. Le graphe de la fonction de répartition est en escalier.
6. Les probabilités sont les suivantes :
   a. P (X = 4) = 0
   b. P (X ≤ 1) = F (1) = 3/18
   c. P (2 ≤ X < 4) = P (X = 2) + P (X = 3) = 5/18
   d. P (X < 2) = P (X = 1) = 3/18

Exercice n° 02 :

Soit X une variable aléatoire finie dont la loi est définie par P (X ≤ x) = $\frac{x+3}{9}$ pour x = 0, 1, 5, 6.
Calculer la loi de probabilité de X.

Solution :

1. La loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	5	6	Σ
p_i	3/9	1/9	4/9	1/9	9/9 = 1
F(x) = P (X ≤ x_i)	3/9	4/9	8/9	9/9	

Exercice n° 03 :

Afin de mener une expérimentation de pharmacologie animale, on tire au hasard 2 comprimés dans un lot opaque qui contient 6 indiscernables au toucher. Parmi ces comprimés, 3 sont dosés à 100 mg de principe actif, 2 sont dosés à 200 mg et le dernier est dosé à 300 mg.

Les 2 comprimés tirés sont administrés à un animal donné, et l'on considère la V.A. X : dose ingérée par l'animal.

1) Calculer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance et la variance de X.
3) Calculer la fonction de répartition F (x) et tracer son graphe.
4) Calculer les probabilités suivantes :

$P(X \geq 200)$; $P(200 \leq X \leq 400)$; $P(200 < X \leq 400)$; $P(X < 400 \text{ et } X > 200)$

Solution :

Le pot opaque contient 6 comprimés où 3 comprimés sont dosés à 100 mg, 2 comprimés dosés à 200 mg, et le dernier est dosé à 300 mg.

On a affaire à un tirage de 2 comprimés du lot opaque. L'espace fondamental est l'ensemble des combinaisons de 2 parmi 6 et c'est un ensemble équiprobable ; donc le nombre de possibilités de tirer 2 comprimés du pot opaque est : $N = C_6^2 = 15$ = cas $\neq$.

Les valeurs à donner à la V.A. X sont : 200 ; 300 ; 400 ; 500 mg.

Le nombre des cas favorables aux valeurs de la V.A. X :

$C_1^1 * C_2^1 * C_3^0 = 2$ cas $\neq$ pour 500 mg ; $C_1^1 * C_2^0 * C_3^1$ et $C_1^0 * C_2^2 * C_3^0 = 3 + 1 = 4$ cas $\neq$ pour 400 mg ;

$C_1^0 * C_2^1 * C_3^1 = 6$ cas $\neq$ pour 300 mg ; $C_1^0 * C_2^0 * C_3^2 = 3$ cas $\neq$ pour 200 mg

Les probabilités et les valeurs de X sont données dans le tableau suivant :

x_i	200	300	400	500	Σ
p_i	3/15	6/15	4/15	2/15	1
$x_i p_i$	600/15	1800/15	1600/15	1000/15	5000/15
$p_i x_i^2$	120000/15	540000/15	640000/15	500000/15	1800000/15
$F(x) = P(X \leq x_i)$	3/15	9/15	13/15	1	

1. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessus.
2. $E(X) = 1000/3$; $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 360000/3 - (1000/3)^2 = 80000/9$
3. La fonction de répartition (voir le tableau ci-dessus).
4. Les probabilités sont les suivantes :
   $P(X \geq 200) = 1$;
   $P(200 \leq X \leq 400) = P(X = 200) + P(X = 300) + P(X = 400) = 13/15$;
   $P(200 < X \leq 400) = P(X = 300) + P(X = 400) = 10/15$
   $P(X < 400 \text{ et } X > 200) = P(X = 300) = 6/15$

Exercice n° 04 :

On pose $f(x) = \begin{cases} e^{4x} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ 0 \leq x < 1 \\ c\ \frac{x^2-1}{2} & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ c\ e^{-2x} & si\ x > 2\ et\ c \geq 0 \end{cases}$

Calculer la valeur du nombre positif c pour laquelle f (x) est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

Solution :

Pour calculer la constance positive c, il faut calculer l'intégrale définie : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
En remplaçant f(x) dans l'intégrale, on aura :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{4x}\, dx + \int_{1}^{2} c * \frac{x^2-1}{2}\, dx + \int_{2}^{+\infty} c * e^{-2x}\, dx = 1 \Rightarrow$

$\int_{-\infty}^{0} e^{4x}\, dx = ¼ * [e^{4x}]_{-\infty}^{0} = 1/4$

$\int_{1}^{2} c * \frac{x^2-1}{2}\, dx = \frac{c}{2}\int_{1}^{2}(x^2-1)dx = \frac{2c}{3}$

$\int_{2}^{+\infty} c * e^{-2x}\, dx = c \int_{2}^{+\infty} e^{-2x}\, dx = -\frac{c}{2}\ [e^{-2x}]_{0}^{+\infty} = \frac{c\, e^{-4}}{2}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ¼ + \frac{2c}{3} + \frac{c\, e^{-4}}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{9}{2(4+3\, e^{-4})}$

Exercice n° 05 :

La proportion de patients soufrant d'une certaine maladie qui réagissent positivement à un traitement A est une variable aléatoire X définie par la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

En même temps, la proportion des mêmes patients qui réagissent positivement à un autre traitement B est une variable aléatoire Y définie par la densité de probabilité suivante :

$$g(x) = \begin{cases} 2\,x & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Calculer la fonction de répartition F (x) de X et la fonction de répartition G (x) de Y.
2. Tracer les graphes de F (x) et G(x).
3. Calculer la probabilité qu'au moins trois quarts des patients, ayant subi le traitement A, réagissent positivement.
4. Calculer la probabilité qu'au moins trois quarts des patients, ayant subi le traitement B, réagissent positivement.
5. Calculer la probabilité que moins de la moitié des patients, ayant subi le traitement A, réagissent positivement.
6. Calculer la probabilité que moins de la moitié des patients, ayant subi le traitement B, réagissent positivement.
7. tracer les graphes des fonctions (1 – F (x)) et (1 – G(x)) dans le même repère orthonormé.
8. Comparer pour un même 0 < x < 1 les deux probabilités P (X ≥ x) et P (Y ≥ x) :
9. Utiliser la question 8. Pour comparer les traitements A et B.

Solution :

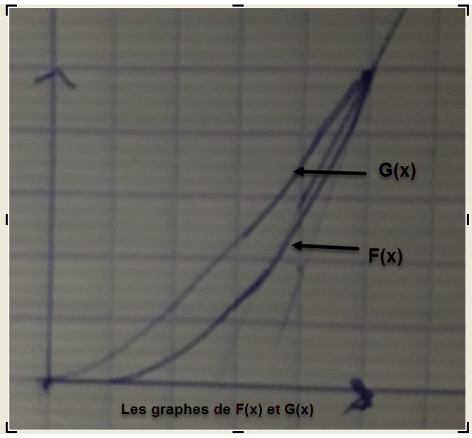
1. La fonction de répartition F (x) = P (X ≤ x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

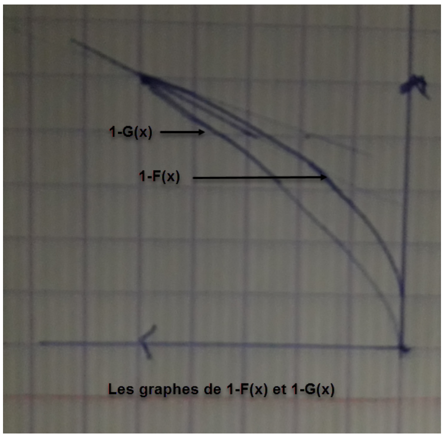
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ \int_0^x 3t^2dt = x^3 & si\ 0 < x < 1 \\ 1 & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition G (x) = P (Y ≤ x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} G(x) = 1 \Rightarrow \quad G(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \int_0^x 2\,t\,dt = x^2 & si\ 0 < x < 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

2. Les graphes de F(x) et G(x) sont : voir fin de l'exercice.
3. $P(X \geq 0.75) = 1 - P(X < 0.75) = 1 - F(0.75) = 1 - 0.75^3 = 0.578125 \approx 57.8125\ \%$
4. $P(Y \geq 0.75) = 1 - P(Y < 0.75) = 1 - G(0.75) = 1 - 0.75^2 = 0.4375 \approx 43.75\ \%$
5. $P(X \leq 0.5) = F(0.5) = 0.5^3 = 0.125 = 12.5\ \%$
6. $P(Y \leq 0.5) = G(0.5) = 0.5^2 = 0.25 = 25\ \%$
7. Les graphes des fonctions : $1 - F(x) = 1 - x^3$; $1 - G(x) = 1 - x^2$ donc les dérivés sont les suivantes : $\frac{d(1-F)}{dx}(x) = \frac{d(1-x^3)}{dx} = -3x^2$ et $\frac{d(1-G)}{dx}(x) = \frac{d(1-x^2)}{dx} = -2x$ par conséquent $\frac{d(1-F)}{dx}(0) = \frac{d(1-G)}{dx}(0) = 0$ et $\frac{d(1-F)}{dx}(1) = -3$ et $\frac{d(1-G)}{dx}(1) = -2$
8. Comparaison des deux probabilités $P(X \geq x)) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x) = 1 - x^3$
   $P(Y \geq x) = 1 - P(Y < x) = 1 - F(x) = 1 - x^2 \quad \Rightarrow$
   Pour tout x tel que $0 < x < 1$ alors on a : $(1 - x^3) - (1 - x^2) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x) \geq 0$
9. D'après la question 8, $P(X \geq x) > P(Y \geq x) \Rightarrow$ le traitement A est plus actif.





Exercice n° 06 :

La fonction de répartition F (x) d'une variable aléatoire X est définie comme suit :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-1}{10\,x} & si\ x < -1 \\ \frac{1}{10} & si\ -1 \leq x < 1 \\ \frac{x}{10} & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{4\,(1-e^2)}{5\,(1-e^x)} & si\ x > 2 \end{cases}$$

1. vérifier qu'effectivement F (x) est une fonction de répartition.
2. Trouver la fonction densité f (x).
3. Calculer les probabilités :

   $P(X \leq -1)$; $P(X \geq 1)$; $P(0 \leq X \leq 3)$

Solution :

1. Pour faire la vérification de la fonction de répartition F(x) alors on doit rappeler le théorème suivant vu auparavant (hors programme).

   Théorème : Si une fonction F : R → R est continue sur tout R et elle est dérivable sur R, sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors elle est croissante sur R.

La fonction F(x) est continue sur les intervalles : $]-\infty\,;\ -1[\,,]-;1[\,,]1;2[\ et\ ]2;\ +\infty[$.

Par ailleurs, on peut facilement montrer cette continuité aux points – 1, 1 et 2.

La fonction F(x) est dérivable sur tout R, sauf (peut-être) aux points – 1, 1 et 2.

Donc elle est croissante d'après le théorème ci-dessus.

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Donc F(x) est effectivement une fonction de répartition.

2. La fonction de densité est telle que f(x) = dF(x)/dx (c'est la dérivé) :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{10\,x^2} & si\ x < -1 \\ 0 & si\ -1 \le x < 1 \\ \frac{1}{10} & si\ 1 \le x \le 2 \\ \frac{4\,(e^{2+x} - e^{x})}{5\,(1-e^{x})^2} & si\ x > 2 \end{cases}$$

3. $P(X \le -1) = 0.1$ $\quad P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0.1 = 0.9$
$P(0 \le X \le 3) = F(3) - F(0) = 0.732192764 - 0.1 \approx 0.6322$