UNIVERSITE DE BATNA_2 **FACULTE DE MEDECINE**

SERIE DE TD N° 9 *en BIOSTATISTIQUE 2019/2020*

Exercices sur les tests d'hypothèse

Exercice 1

On étudie la dépendance à un médicament. Une région du cerveau, appelée VTA, contient des récepteurs (GABA-A) qui, exposés à l'enzyme anhydrase carbonique, contrôlent le basculement d'un état de non-accoutumance à un état d'accoutumance. Chez les sujets à risque, le dosage de l'activité de cet enzyme suit une loi normale d'espérance $\mu = 10.7$ et d'écart-type σ inconnu.

Une série de dosages effectués sur une personne a donné :

12.9 8.7 9.0 1.2 2.7 9.7 9.1 10.3

Cette personne peut-elle être considérée comme étant à risque au seuil de 5% ?

Solution :

La moyenne et l'écart-type de l'échantillon : $\bar{x} = 7.95$ $s = 3.949683532 \approx 3.9497$

Formulation des hypothèses ; test bilatéral (égal contre différent).

Hypothèse nulle H_0 : $\{\bar{x} = \mu = 10.7\}$ contre hypothèse alternative H_1 : $\{\bar{x} \neq \mu\}$

Le seuil critique : $\alpha = 0.05 = P$ (rejeter H_0/H_0 vraie) ; n = 9 et σ inconnu $\Rightarrow$ Table n° 3 $t_{0.05\,;\,7} = -2.365$

Si la statistique de test $\in [-2.365 \,;\, +2.365]$ alors on ne peut pas rejeter H_0.

Calcul de la statistique de test : $To = \dfrac{\sqrt{8}\,(7.95-10.7)}{3.949683532} = -1.9693159 \approx -1.969$

Décision : $T_{0.05\,;\,7} = -2.365 \in [-2.365 \,;\, +2.365]$ comme la statistique de test observée To se trouve dans la zone d'acceptation de $\boldsymbol{H_0}$ (non rejet de H_0). Alors la personne est considérée comme étant à risque.

Exercice 2

Le fabriquant d'un médicament annonce qu'un de ses produits est efficace à 90 % en supprimant une allergie dans un délai de 8 heures. Dans un échantillon de 200 personnes, le résultat a été effectif pour 160 d'entre elles.

Déterminer si l'affirmation du fabricant est légitime au seuil de 1%.

Solution :

Formulation des hypothèses ; test unilatéral (égal contre inférieur).

Hypothèse nulle $H_0 : p = 0.9$, et l'affirmation est correcte, contre

Hypothèse alternative $H_1 : p < 0.9$ et l'affirmation est fausse.

Appelons p la probabilité du soulagement par utilisation du médicament du fabriquant.

Nous choisissons un test unilatéral car nous sommes intéressés à déterminer si la proportion des individus soulagés n'est pas trop basse.

Le seuil critique : le niveau de signification est $\alpha = 0.01 = P$ (rejeter H_0/H_0 vraie) ; grand échantillon.

$\Rightarrow u_{0.01} = -2,326$ comme on peut le voir d'après le problème par symétrie de la table n° 2 de la loi normale. La règle de décision sera : si la statistique de test est inférieure à – 2,326 (dans ce cas, nous rejetons H_0) et l'affirmation est fausse. Dans tous les autres cas, l'affirmation est légitime (et nous acceptons H_0).

Calcul de la statistique de test observé : Si H_0 est vraie, la moyenne et la variance dans ce cas sont connues :

$\mu = np = 200 * 0,9 = 180$ et $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 * 0.9 * 0.1} = 4.243$

L'échantillon a donné l'efficacité du produit pour 160 personnes parmi les 200 ou une fréquence observée de $f = \frac{160}{200} = 0.8 \Rightarrow$ La statistique de test To sera :

$$To = \frac{f - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0.8 - 0.9}{\sqrt{\frac{0.9 * 0.1}{200}}} = -4.714 \qquad \text{ou} \qquad To = \frac{160 - 180}{4.243} = -4.714$$

Et si To est inférieur à $u_{0.01} = -2{,}326$ valeur lue dans la table n° 2, alors on rejette H_0.

<u>Décision</u> : comme $To = -4.714 \notin [-2.326 ; +\infty]$ = zone d'acceptation de H_0.

Alors, nous conclurons que l'affirmation est fausse (rejet de H_0) et que les résultats obtenus sur l'échantillon sont très significatifs (acceptation de H_1).

<u>Exercice 3</u>

On teste deux traitements anti–cancéreux A et B sur deux populations PA et PB de patients de même taille $n_A = n_B = 50$. L'efficacité d'un traitement est évaluée par l'éventuelle diminution de la taille de la lésion tumorale, estimée par l'imagerie médicale, après un an de traitement.

Pour la population soumise au traitement A on observe une diminution de la taille des tumeurs dans 27 cas sur 50 et pour le traitement B, dans 18 cas.

Peut–on conclure à une différence d'effet des deux traitements (au seuil de 5%) ?

Peut-on conclure que le traitement A est plus efficace que le traitement B (au seuil de 5 %) ?

Solution :

<u>Question 1</u> :

1) *<u>Formulation des hypothèses</u>* : test bilatéral où $H_0 : p_A = p_B$ contre $H_1 : p_A \neq p_B$.
2) *<u>Le seuil critique</u>* : $\alpha = 0.05 = P$ (rejeter H_0 / H_0 vraie). La table n° 1 donne $u_{0.05} = 1.96$
   Si la statistique de test $To \in [-1.96 ; +1.96] \Rightarrow$ on ne peut pas rejeter H_0.

Les deux fréquences observées : $f_1 = \frac{27}{50} = 0.54$ et $f_2 = \frac{18}{50} = 0.36 \Rightarrow f_0 = \frac{27+18}{50+50} = 0.45 \Rightarrow$

$$\sigma_c = \sqrt{f_0(1 - f_0)\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)} = \sqrt{0.45(1 - 0.45)\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right)} = 0.099498743 \Rightarrow$$

3) *<u>La statistique de test observé</u>* : $To = \frac{0.54 - 0.36}{0.099498743} = 1.8090689$
4) *<u>Décision</u>* : comme la valeur du test : $To = 1{,}8091 \in [-1.96 ; +1.96] \Rightarrow$ on ne peut pas rejeter H_0.
   $\Rightarrow$ Pas de différence d'effet entre les 2 traitements.

<u>Question 2</u> :

1) *<u>Formulation des hypothèses</u>* : test unilatéral droit où $H_0 : p_A = p_B$ contre $H_1 : p_A > p_B$.
2) *<u>Le seuil critique</u>* : $\alpha = 0.05 = P$ (rejeter H_0 / H_0 vraie). La table n° 1 donne $u_{0.05} = 1.645$

   Si la statistique de test $To \in [1.645 ; +\infty] \Rightarrow$ on rejette H_0.

3) *<u>La statistique de test observé</u>* : $To = \frac{0.54 - 0.36}{0.099498743} = 1.8090689$
4) *<u>Décision</u>* : comme la valeur du test : $To = 1{,}8091 \in [1.645 ; +\infty] \Rightarrow$ on rejette H_0.
   $\Rightarrow$ Il y a une différence significative entre les 2 traitements ou le traitement A est plus efficace.

<u>Exercice 4</u>

1) Pour mesurer le pH d'une solution, on utilise un pH–mètre qui affiche un résultat dont la loi est normale $N(\mu ; \sigma^2 = 0.05^2)$ où μ est la vraie valeur du pH de la solution. On a mesuré le pH d'une solution A par

12 mesures indépendantes et on a trouvé une moyenne de $\bar{x}_A$ = 7.4, et le pH d'une solution B par 10 mesures indépendantes et on a trouvé une moyenne de $\bar{x}_B$ = 7.5.

Peut–on considérer que les deux solutions ont un même pH au seuil de 1 % ?

2) Pour mesurer le pH d'une solution, on utilise un nouveau pH–mètre qui affiche un résultat dont la loi est N (μ ; σ^2), où μ est la vraie valeur du pH de la solution et où σ n'a pas été déterminé. On a mesuré le pH d'une solution A par 12 mesures indépendantes et trouvé une moyenne de $\bar{x}_A$ = 7.4 et un écart-type de s_A = 0.09, et le pH d'une solution B par 10 mesures indépendantes et trouvé une moyenne de $\bar{x}_B$ = 7.5 et un écart-type de s_B = 0.08

Peut–on considérer que les deux solutions ont un même pH (au seuil 1%) ?

Solution :

1) Les 2 échantillons donnent : $\bar{x}_A$ = 7.4 ; n_A = 12 et $\bar{x}_B$ = 7.5 ; n_B = 10. On a N (μ ; 0.05^2).
La statistique de test To = $\frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} = \frac{7.4 - 7.5}{0.05\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}}$ = – 4.6709937 ≈ – 4.67
Si la statistique de test observé To ∉ [– 2.576 ; + 2.576] ⇒ on rejette H_0.
To = – 4.67 donc l'hypothèse H_0 est rejetée au seuil 1% (table 1 ou 2 donne : $z_{0.01}$ = – 2.576).
On conclut que les deux solutions n'ont pas un même pH.

2) La variance commune $s_c^2 = \frac{(n_A-1)\, s_A^2+(n_B-1)\, s_B^2}{n_A+ n_B-2} = \frac{(11)\, 0.81+(9)\, 0.64}{12+10-2}$ = 0.7335 ⇒ s_c = 0.856446145
La statistique de test To = $\frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_c\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} = \frac{7.4 - 7.5}{\sqrt{0.7335(\frac{1}{12}+\frac{1}{10})}}$ = – 0.272696286 ≈ – 0.273 ∈ [– 2.845 ; + 2.845] ⇒ on ne peut pas rejeter H_0 (donc les solutions sont de mêmes pH), au seuil 1%.

<u>Exercice 5</u>

Le poids moyen d'un groupe de n_1 = 50 étudiants d'une université donnée qui se sont montrés très amateurs de lutte sportive, s'est trouvé être de $\bar{x}_1$ = 68.2 kg, avec un écart-type de s_1 = 3.6 kg, tandis qu'un deuxième groupe de n_2 = 50 étudiants nettement moins intéressés par le sport, ont présenté un poids moyen de $\bar{x}_2$ = 67.5 kg, avec un écart-type de s_2 = 2.8 kg.

Tester l'hypothèse selon laquelle les étudiants amateurs de sport pèsent plus que les autres étudiants.

Solution :

Nous devons choisir entre les deux hypothèses nulle et alternative : les étudiants amateurs de sport pèsent plus que les autres étudiants donc on à faire un test unilatéral droit.

<u>Formulation des hypothèses</u>

H_0 : $\mu_1 = \mu_2$, et il n'y a pas de différence entre les poids moyens.

H_1 : $\mu_1 > \mu_2$, et le poids moyen du premier groupe est supérieur à celui du second groupe.

Dans l'hypothèse : H_0, $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 0$; $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{3.6^2}{50}+\frac{2.8^2}{50}}$ = 0.644980619 ≈ 0.645

Où nous avons utilisé l'écart–type de l'échantillon comme estimateur de σ_1 et σ_2.

<u>Le seuil critique</u> : on choisit un risque de 1ère espèce α = 0.05 = P (rejeter H_0/H_0 vraie) = [1.645 ; + ∞]

<u>Calcul de la statistique de test</u> : To = $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{68.2-67.5}{0.645}$ = 1.085303928 ≈ 1.0853

<u>Décision</u> : comme la statistique de test observé est égale à 1.0853 ⇒ sur la base d'un test unilatéral à un niveau 0.05, nous rejetterions *H_0* si *To* était supérieur à 1,645. Ce n'est pas le cas ; on ne peut pas rejeter cette hypothèse au niveau de signification 0,05 et on conclut les poids des deux groupes sont les mêmes.

Exercice 6

On s'intéresse au taux dans le sang d'une certaine hormone. Cette hormone est affectée si l'on intègre une substance dopante. Chez les sujets normaux, une certaine quantité de l'hormone est distribuée normalement avec une concentration de $\mu = 0.4$ en moyenne et une variance de $\sigma^2 = 0.04$.

Chez les sujets dopés, la quantité d'hormone augmente et dépasse 0.4 en moyenne. Un contrôle anti-dopage, mesurant le taux dans le sang de cette hormone a été effectué sur une équipe de n = 16 sportifs. Les sportifs subissant exactement le même entrainement, il n'y a que deux possibilités : soit ils sont tous dopés, soit aucun ne l'a été. Les recueillies sont les suivantes :

sujet	1	2	3	4	5	6	7	8
hormone	0.35	0.40	0.65	0.27	0.14	0.59	0.73	0.13
sujet	9	10	11	12	13	14	15	16
hormone	0.24	0.48	0.12	0.70	0.21	0.13	0.74	0.18

Peut–on dire que les sportifs testés sont dopés au seuil de 5% ?

Solution :

Les paramètres de l'échantillon sont : $\bar{x} = 0.37875$ s = 0.235736434 $\sigma^2 = 0.04$ (c'est donné)

Formulation des hypothèses : $H_0 : \bar{x} - \mu = 0$ contre $H_1 : \bar{x} - \mu > 0$; test unilatéral droit (= contre >)

Le seuil critique : σ connu ; n < 30 ; $\alpha = 0.05 = P$ (rejeter H_0/H_0 vraie) $\Rightarrow z_\alpha = z_{0.05} = 1.645 > 0$
Si la statistique de test observé est supérieur au seuil critique $z_{0.05} = 1.645$ alors on rejette H_0.

Calcul de la statistique de test : $To = \sqrt{n}\ \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} = \sqrt{16}\ \frac{0.37875 - 0.4}{0.2} = -\,0.425$

Décision : comme $To = -\,0.425 < z_{0.05} = 1.645$ on ne peut pas rejeter H_0. La p-valeur = 33.54 %

Exercice 7

Les spécifications d'un médicament indiquent que chaque comprimé doit contenir en moyenne 1.5 g de substance active. 100 comprimés sont choisis au hasard dans la production, puis analysés. Les mesures en g des quantités de substance active étant trop nombreuses, seules leur somme et la somme de leurs carrés vous sont données : $\sum_1^{100} x_i = 155$; $\sum_1^{100} x_i^2 = 248$

Au risque de 5%, pouvez–vous dire que la production respecte l'indication mentionnée ?

Solution :

La moyenne et l'écart-type de l'échantillon sont :
$\bar{x} = \frac{155}{100} = 1.55$; $s^2 = \frac{100}{99}\left(\frac{248}{100} - 1.55^2\right) = 0.078282828 \Rightarrow s = 0.279790686 \approx 0.280$

Formulation des hypothèses : $H_0 : \bar{x} = \mu = 1.5$ g contre $H_1 : \bar{x} \neq \mu = 1.5$; test bilatéral.

Le seuil critique : σ inconnu ; n > 30 ; $\alpha = 0.05 = P$ (rejeter H_0/H_0 vraie) $\Rightarrow z_\alpha = z_{0.05} = 1.96$
Si la statistique de test observé $\notin [-\,1.96 ; +\,1.96]$ alors on rejette H_0.

Calcul de la statistique de test : $To = \sqrt{n}\ \frac{\bar{x}-\mu}{s} = \sqrt{100}\ \frac{1.55 - 1.5}{0.279790686} = +\,1.787$

Décision : comme $To = +\,1.787 \in [-\,1.96 ; +\,1.96] \Rightarrow$ On ne peut pas rejeter H_0.

Exercice 8

Des études en psychologie du développement ont montré qu'à l'âge de 12 mois, 50% des bébés « normaux » marchent. On souhaite mener une étude sur les retards de développement des bébés prématurés.

On teste l'hypothèse que les bébés prématurés marchent plus tardivement que les bébés normaux. On observe une population de 80 bébés prématurés. A 12 mois, 35 de ces 80 bébés marchent.

Faut-il réaliser un test unilatéral ou bilatéral ?

Peut–on, au seuil de signification de 5%, valider l'hypothèse de recherche ?

Solution :

On doit utiliser un test d'hypothèse unilatéral gauche (égal contre inférieur) car le test est : est-ce que les prématurés marchent plus tardivement ?

H_0 : {les bébés prématurés marchent comme les bébés normaux} = $\{p = p_0 = 0.5\}$ contre
H_1 : {les bébés prématurés marchent plus tardivement que les bébés normaux} = $\{p < p_0\}$

Le seuil critique $u_{0.05} = -1.645$ Si To > SC $\Rightarrow$ on ne peut pas rejeter H_0.

La fréquence p peut-être estimée par $f = \frac{35}{80} = 0.4375$

$$To = \frac{\sqrt{n}\,(p - p_0)}{\sqrt{p_0\,(1 - p_0)}} = \frac{\sqrt{n}\,(f - p_0)}{\sqrt{p_0\,(1 - p_0)}} = \frac{\sqrt{80}\,(0.4375 - 0.5)}{\sqrt{0.5\,(1 - 0.5)}} = -1.118034 \approx -1.118$$

Comme To = – 1,118 > $u_{0.05}$ = – 1.645. On ne peut pas rejeter H_0 (les observations disponibles ne montrent pas que les bébés prématurés marchent plus tardivement au risque de 5 %). La p-valeur = 0.1318 > 0.05 = α (donc le test serait significatif pour un choix du risque α > 13.18 %).

Exercice 9

Neuf malades présentant des symptômes d'anxiété reçoivent un traitement. On évalue l'état des malades avant et après traitement par un indice que le médecin traitant calcule d'après les réponses à une série de questions. Si le traitement est efficace, l'indice doit diminuer. Les valeurs de cet indice sur les neuf patients sont données dans le tableau suivant :

Patient	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Avant	1.83	0.50	1.62	2.48	1.68	1.88	1.55	3.06	1.30
Après	0.88	0.65	0.59	2.05	1.06	1.29	1.06	3.14	1.29

Le traitement est-il efficace au seuil de 0.05 ?

Solution :

Formulation des hypothèses : si le traitement est efficace, l'indice doit diminuer.
$H_0 : \mu = 0$ contre $H_1 : \mu > 0$ test unilatéral droit (égal contre supérieur)

Avant	1.83	0.50	1.62	2.48	1.68	1.88	1.55	3.06	1.30
Après	0.88	0.65	0.59	2.05	1.06	1.29	1.06	3.14	1.29
Av–ap	0.95	– 0.15	1.03	0.43	0.62	0.59	0.49	– 0.08	0.01

$\bar{x} = 0.432222222$ s = 0.428450048

Le seuil critique : le risque de 1ère espèce, $\alpha = 0.05$ = P (rejeter H_0 / H_0 vraie), étant choisi et le test est unilatéral droit avec t > 0, le nombre de ddl = n – 1 = 8, alors on cherche t_α tel que P ($U = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}}{s} > t_\alpha$) = α ; $t_{\alpha,8}$ doit donc vérifier P ($|U| = \left|\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}}{s}\right| > t_\alpha$) = $2\alpha = 0.10$ et avec $\alpha = 0.05$ on lit dans ***la table n° 3 de Student*** $t_{\alpha,8} = \mathbf{t_{0.05\,;\,8} = 1.86}$; si la statistique de test observé > SC on rejette H_0.

Calcul de la statistique de test observé $To = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}}{s} = \sqrt{9}\,\frac{0.432222222}{0.428450048} = 3.026412693 \approx \mathbf{3.03}$

Décision : **To = 3.03 > $\mathbf{t_{0.05\,;\,8}}$ = 1.86** alors on rejette H_0 et on conclue que le traitement est efficace.