

## Chapitre 1 : Modèles de processus

### 1.1 Notion de processus

L'objet de cet ouvrage est la modélisation des processus.

Un **processus** est un **système dynamique**, c'est-à-dire un système évolutif pour lequel le temps joue un rôle fondamental.

Dans le cas général (fig.1.1), un processus est un système traversé par des flux d'information, d'énergie et de matière tout en étant soumis à des perturbations ayant l'une des trois formes précitées.

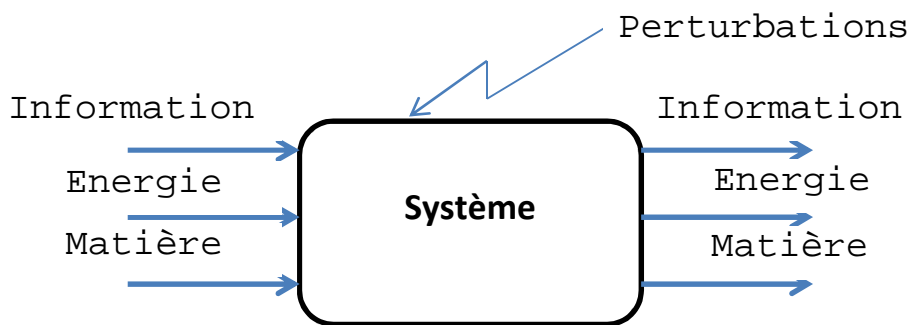


Fig. 1.1 : Représentation générale d'un processus.

Du point de vue d'un observateur, un processus correspond à un système physique envisagé dans le cadre de l'évolution des échanges réalisés avec son environnement.

Diverses variables peuvent être mises en évidence sur un processus :

- ✓ Des **entrées de commande**, qui permettent d'agir sur l'évolution du processus ;

- ✓ **Des entrées de perturbation**, en général non contrôlables par l'utilisateur et qui agissent également sur le processus ;
- ✓ **Des sorties**, variables mesurables ou au moins détectables, qui caractérisent l'action du processus sur son environnement ;
- ✓ **Des variables d'état**, variables internes du système, dont l'action sur l'environnement n'est pas nécessairement directement perceptible mais dont l'évolution régit celle du processus.

L'étude et la commande d'un processus s'effectuent à partir d'un **modèle** de ce processus. Il existe plusieurs types de modèles, principalement les **modèles de connaissances** d'une part, et les **modèles de représentation** et de **conduite** d'autre part. Il est important de noter que dans tous les cas, le système existe indépendamment de tout modèle que l'on peut lui attribuer et que le modèle n'est le plus souvent qu'une simplification et une caractérisation de la réalité.

D'un point de vue plus épistémologique, on peut enfin remarquer que le modélisateur est, en fait, partie intégrante du modèle avec qui il se trouve en interaction étroite :

- ✓ La nature du modèle dépend des objectifs de son concepteur ;
- ✓ Le modèle adopté modifie la perception et la compréhension que le modélisateur a du processus.

## **1.2 Notion de modèle**

### **1.2.1 Modèle de connaissance**

Un modèle de connaissance est un modèle dont les caractéristiques et les équations ont été établies en faisant appel à des modèles plus généraux mettant en œuvre les lois de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'économie,... Les paramètres d'un tel modèle ont alors une interprétation physique directe : température, pression, courant, accélération, force... Ils sont beaucoup plus riches de signification que les modèles de représentation définis ci-dessous et contiennent toutes les informations utiles sur le processus étudié. Par contre, ils sont en général difficiles à déterminer et de mise en œuvre complexe.

### **1.2.2 Modèles de représentation et modèles de conduite**

Ces modèles ne permettent pas, le plus souvent, d'interprétation physique des phénomènes étudiés. Ils sont constitués d'un ensemble de relations mathématiques qui vont relier dans un domaine d'évolution donné, les différentes variables du processus. Les paramètres de tels modèles peuvent n'avoir aucun sens physique particulier connu.

### **1.2.2.1 Modèles de règle**

Ils correspondent à une description par règle de conduite, comme « si on actionne **A** deux fois, **B** avance » et sont issus de l'observation du système en fonctionnement. Souvent lourds à manier et limités du point de vue possibilités, ils se prêtent assez bien à une exploitation mettant en œuvre les techniques de l'intelligence artificielle.

### **1.2.2.2 Modèles fichiers**

Ils sont constitués d'informations, sous forme de tableaux de données, reliant l'évolution des sorties du processus à l'évolution des entrées pour diverses classes d'entrées. Ces modèles constituent le plus souvent le point de départ en vue de l'élaboration de modèles plus évolués (en analyse structurale, ce niveau s'appelle le « système source »).

### **1.2.2.3 Modèles entrées-sorties**

Dans ce type de représentation, les entrées et les sorties du processus sont liées par un ensemble de relations mathématiques (en analyse structurale c'est le niveau « système générateur »). Cet ensemble peut être composé de relations algébriques, d'équations différentielles, et de relations récurrentes. A ces relations de type égalité, peuvent se rajouter des relations de type inégalité ou inclusion, permettant de tenir compte de contraintes

ou d'éventuelles saturations. Dans le cas de processus linéaires stationnaires à état continu, les relations entrées - sorties peuvent être définies par des **matrices de transfert** (en  $s$  ou en  $z$ ).

Les modèles entrées-sorties correspondent aux représentations du type « **boite noire** ».

#### 1.2.2.4 Modèle d'état

Ils sont caractérisés par un ensemble de variables, en nombre minimum, regroupées dans un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  appelé **vecteur d'état**, dont la connaissance à l'instant  $t_0 \in \mathbb{R}$  associée à la connaissance de l'évolution des entrées  $u \in \mathbb{R}^l$   $x(t)$  sur l'intervalle  $\mathbb{R} = t_0, \tau$  permet, à partir d'un modèle, de prévoir l'évolution de  $x(t)$  sur  $\mathbb{R}$ . Dans l'hypothèse déterministe, il existe alors une fonction  $\varphi(t, t_0, x(t_0), u(t_0, t))$  appelée **fonction de transition d'état** telle que :

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(t_0, t)) \quad (\text{I.1})$$

Avec les propriétés :

$$\varphi(t, t, x(t), u(t, t)) = x(t) \quad (\text{I.2})$$

$$\varphi(t, t_0, x(t_0), u(t_0, t)) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x(t_0), u(t_0, t_1)), u(t_1, t)), \quad (\text{I.3})$$

$$\forall t_1 \in t_0, t.$$

Un tel modèle est appelé équation d'état sous forme explicite, par opposition aux modèles de types équations différentielles ou récurrentes qui sont des équations d'état sous forme implicite. Les systèmes à paramètres distribués peuvent s'interpréter comme des systèmes de vecteur état de dimension infinie.

Il est important de noter que les systèmes physiques sont non anticipatifs et ne peuvent pas dépendre d'évènements futurs.

Dans l'ensemble  $\mathbb{R}^n$ , certains états peuvent ne pas exister, ce qui conduit à définir **l'ensemble des états admissibles**  $X \subset \mathbb{R}^n$  comme l'ensemble des états  $x$  possibles. Par exemple, pour un registre de 4 bits, 16 états seulement sont possibles.

Pour un système simple de charge d'une capacité  $C$  à travers une résistance  $R$ , l'état (tension aux bornes de la capacité) peut être limité entre -250 et +250 Volts.

Si cet ensemble  $X$  est compact, le système est dit à **état continu**. Si  $X$  est dénombrables (donc non compact), on a un système à **état discret**.

Dans les deux exemples précédents, le registre est donc un système à états discrets, et le système RC est à états continus.

Si le nombre d'éléments de  $X$  est fini, le système est à **états finis**. C'est le cas en pratique pour tous les systèmes informatiques à états discrets, du fait des saturations de capacité mémoire.

Enfin, les systèmes échantillonnés correspondent à des systèmes à états continus observés ou commandés à des instants dénombrables. En pratiques, ces instants sont très souvent générés par une (ou plusieurs) horloge(s) régulière(s), ce qui rend l'échantillonnage périodique.

Ceci peut se résumer par le tableau suivant :

$x$ $t$	Systeme à états continus	Systeme à états discrets
Temps continu	Systeme continu exemple : équation de récurrence	Exemple : système asynchrone
Temps discret	Systeme discret exemple : équation de récurrence	Exemple : système synchrone

"automatique"

"logique"

### 1.2.2.5 Modèles graphiques

Les modèles graphiques constituent un mode de représentation en général assez aisé à manipuler et possédant des propriétés remarquables susceptibles d'aider à la modélisation et parfois de permettre de la valider. Les principaux types de modèles graphiques sont :

#### A. Les schémas fonctionnels

Ce mode de description appelé également représentation par schéma-blocs est souvent utilisé

de façon intuitive. Il correspond à une description directe des divers éléments du processus étudié, (fig. 1.2 et 1.3), faisant ou non intervenir les diverses relations mathématiques mises en œuvre

0662576064

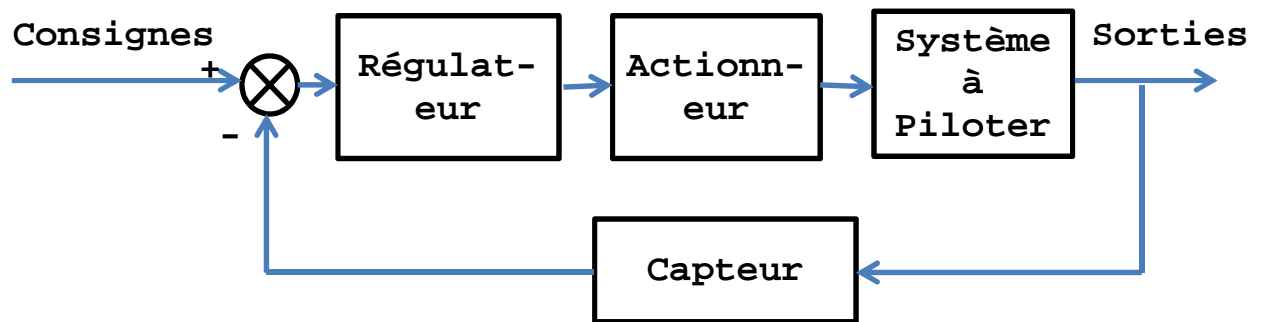


Fig. 1.2 : Représentation par schéma-blocs.

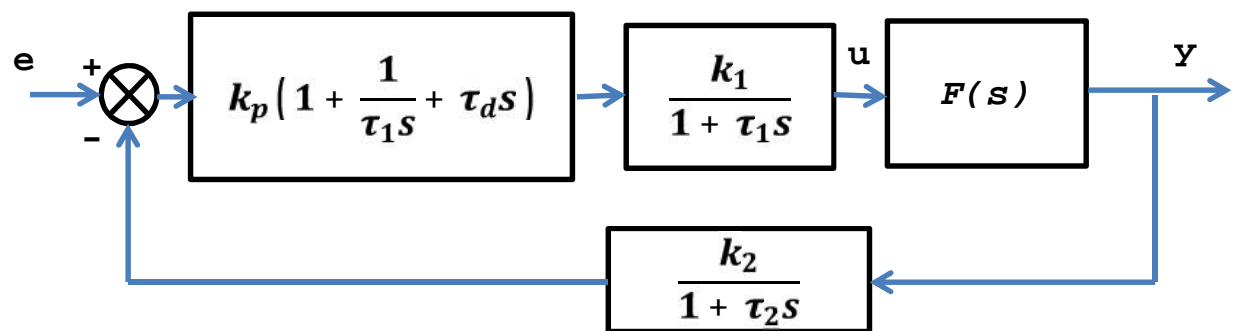


Fig. 1.3 : Régulation de processus.

## B. Les graphes de fluence

Ils correspondent à une représentation proche de celle des schémas fonctionnels (fig. 1.4) (ces deux représentations sont en effet duales l'une de l'autre).

L'intérêt des graphes de fluence apparaît principalement au niveau de la modélisation des systèmes linéaires, c'est-à-dire pour lesquels il est



possible d'appliquer le théorème de superposition défini plus loin

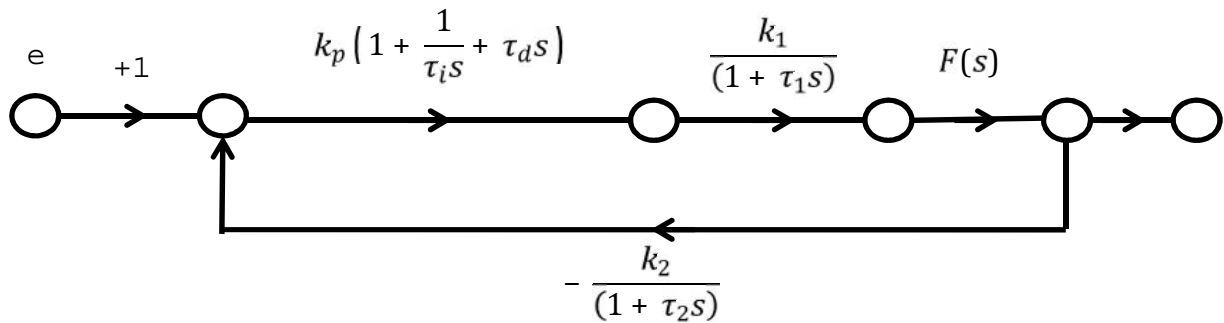


Fig. 1.4 : Graphe de fluence.

### C. Les réseaux de Petri et les grafjets

Ces représentations sont particulièrement adaptées aux processus à événements discrets dont le nombre d'états est fini.

Très importants, principalement dans la caractérisation des systèmes logiques, des systèmes de fabrication automatisée et des ateliers flexibles, ces modes de représentation sont développés dans un volume spécifique de cette collection.

### D. Les bond-graphs

Ils permettent une description des systèmes physiques (mécaniques, électriques, hydrauliques...) très bien adaptée à la modélisation des transferts de puissance, avec un langage unique quel que soit le domaine physique concerné. Une présentation succincte de cette technique est proposée chapitre 5 et un volume de cette collection est entièrement consacré à ce type de modélisation très performant.

### 1.3 Choix du modèle d'un processus

La détermination d'un modèle mathématique d'un processus nécessite en général diverses hypothèses simplificatrices afin de limiter sa complexité. Dans chaque application, il apparaît nécessaire de faire un compromis entre la finesse et la précision du modèle à mettre en œuvre d'une part, et la limite de complexité admissible, compte tenu des objectifs fixés, d'autre part.

Nous nous intéressons ici essentiellement aux processus pour lesquels les variables caractéristiques sont susceptibles de prendre un ensemble continu de valeurs appartenant à des intervalles fixés. De plus, nous ne traiterons que des modèles de processus à paramètres localisés, c'est-à-dire, décrits par des équations différentielles ordinaires ou des équations récurrentes. L'étude spécifique des systèmes à paramètres distribués, par exemple ceux dont l'évolution est régie par des équations aux dérivées partielles, est envisagée en détail dans un autre volume de cette collection.

Il est important de toujours se souvenir que le choix du modèle d'un processus dépend de l'utilisation prévue pour ce modèle.

Considérons à titre d'exemple un modèle d'automobile. Si le but du modèle est d'étudier la résistance au vent du véhicule, il suffit de prendre en compte la forme extérieure du véhicule et l'état

des diverses surfaces qui le caractérisent. Si on s'intéresse à la résistance du véhicule en cas de choc, le modèle sera plus complexe et devra faire intervenir les caractéristiques géométriques et mécaniques de la carrosserie mais également du châssis et de l'ensemble de la structure interne de la voiture.

Lorsque l'objectif est de prévoir le comportement du véhicule en fonctionnement, le modèle pourra être simplifié du point de vue de la plupart des structures qui pourront être supposées rigides mais par contre, on devra tenir compte des caractéristiques du moteur, des amortisseurs, etc...

On voit que les modèles utilisés dans les divers cas envisagés peuvent être très différents.

### 1.3.1 Modèle à temps continu

Dans ce type de modèle, le temps est une variable qui évolue continûment sur un intervalle  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$  prenant en croissant toutes les valeurs situées dans cet intervalle. C'est le cas, par exemple d'un modèle dans l'espace d'état de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t, v), \\ y &= \mathbb{H}(x, u, t, v), \end{aligned} \tag{I.4}$$

Modèle dans lequel  $\dot{x}$  représente la dérivée totale  $dx/dt$  du vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  par rapport au temps,  $u \in \mathbb{R}^l$  le vecteur des commandes,  $t \in \mathbb{T}$  le temps,  $v \in \mathbb{R}^{n_v}$  un

vecteur de perturbations, et  $y \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des sorties.

Dans cette représentation on a :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_v} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \mathbb{Q}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_v} &\rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \mathbb{Q} &= t_0, t_0 + T_e, t_0 \in \mathbb{R}, t_0 \ll \infty, T_e \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Dans beaucoup de problèmes, on prend  $t_0 = 0$  ou  $t_0 > 0$  mais cette restriction n'est en aucun cas nécessaire *à priori*.

### 1.3.2 Modèle à temps discontinu ou discret

Ce type de modèle est utilisé soit lorsque le processus étudié a naturellement un mode d'évolution séquentiel, soit lorsqu'on a adopté une représentation du processus qui correspond à une observation des variables d'état ou de sortie à des instants discrets  $t_k$  du temps avec  $k \in \mathbb{Z}$ . On a dans ce cas une représentation dite échantillonnée, particulièrement bien adaptée aux divers types de calculs à effectuer dans les problèmes de commande de processus par ordinateur numérique.

En notant :

$$x_k = x(t_k) \tag{I.5}$$

Il vient une description de la forme :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k, k, v_k) \\ y_k &= \mathbb{Q}(x_k, u_k, k, v_k) \end{aligned} \tag{I.6}$$

### 1.3.3 Modèle linéaire

Un tel modèle caractérise un processus susceptible d'être décrit par une équation différentielle ordinaire ou une équation récurrente à coefficients constants (stationnaire) ou fonction du temps (non stationnaire) ou par un ensemble d'équations de ce type.

La propriété fondamentale des systèmes linéaire s'exprime par le principe de superposition : si  $y_1 t$  et  $y_2 t$  représentent respectivement l'évolution des sorties du processus pour les entrées  $u_1 t$  et  $u_2 t$  sur un horizon et pour un état initial donnés, alors, à l'entrée  $u(t)$  :

$$u t = \alpha_1 u_1 t + \alpha_2 u_2 t \quad (\text{I.7})$$

Où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont réels, correspond la sortie :

$$y t = \alpha_1 y_1 t + \alpha_2 y_2 t \quad (\text{I.8})$$

Sur le même horizon et pour les mêmes conditions initiales.

Les systèmes linéaires stationnaires admettent une représentation entrée-sortie par fonction ou matrice de transfert, en  $s$  ou en  $z$  selon qu'il s'agit d'un modèle continu ou discret.

### 1.3.4 Modèle non linéaire

Dans un modèle non linéaire, le théorème de superposition n'est plus valable. L'aspect non linéaire peut être intrinsèque et quasiment irréductible, comme dans la modélisation de la loi

d'action de masse en chimie, ou correspondre à l'association d'éléments à caractéristiques non linéaires à des systèmes pour lesquels un modèle linéaire est utilisable comme c'est le cas des systèmes à non linéarités séparables (fig.1.5).

Dans certains cas, lorsque le processus non linéaire est utilisé dans une plage de variation limitée de ses variables d'état, l'évolution s'effectuant autour d'une valeur  $x_0$  donnée, il est possible d'effectuer une linéarisation autour de ce point de fonctionnement en prenant comme nouvelle variable l'expression  $\delta x = x - x_0$ .

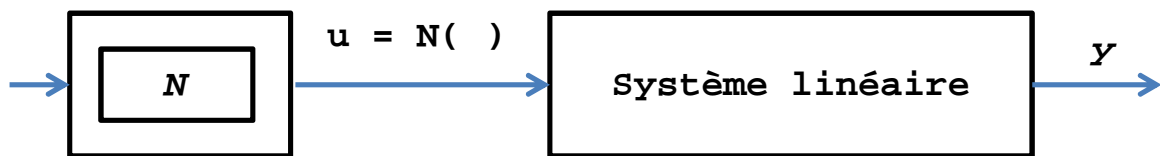


Fig. 1.5 : Système à non linéarité séparable.

On néglige alors dans développement limité de la fonction  $f(.)$  les termes d'ordre supérieur à 1.

Il vient par exemple pour la relation :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (\text{I.9})$$

Si la fonction  $f$  admet des dérivées partielles continues au premier ordre, le modèle linéarisé (1.10) valable pour  $(x, u)$  évoluant dans un voisinage de  $(x_0, u_0)$  :

$$\frac{d}{dt} \delta x = F_x(x_0, u_0, t) \delta x + F_u(x_0, u_0, t) \delta u \quad (\text{I.10})$$

Avec :

$$\delta x = x - x_0, \quad \delta u = u - u_0, \quad \text{et où :}$$

$$F_x = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad F_u = \frac{\partial f_i}{\partial u_j},$$

Sont les matrices jacobiniennes de  $f$  en  $x$  et  $u$ .

Il est également possible d'effectuer une linéarisation autour d'une trajectoire d'évolution

$x_N t, u_N t$  donnée solution de (I.9).

Pour certains processus non linéaires et/ou non stationnaires, on adopte aussi parfois une représentation multi-modèle, chaque modèle étant représentatif de l'évolution du processus dans un domaine limité de l'espace et du temps.

Ainsi un système linéaire non stationnaire peut être représenté par un ensemble de modèles linéaires à coefficients constants se succédant au cours du temps.

La mise en œuvre de tels modèles en vue de la résolution d'un problème donné nécessite bien sûr une validation terminale.

#### 1.4 Identification

L'identification constitue une phase importante dans la définition du modèle, c'est par elle que le choix de la classe de modèles à adapter puis les valeurs des paramètres qui le caractérisent vont se préciser.

Le plus souvent l'identification s'effectue en optimisant un critère de qualité qui caractérise l'écart entre le comportement du processus (repéré par un ensemble de mesures), et celui de son modèle (étudié par simulation) pour un ensemble de sollicitations données.

De nombreuses méthodes d'identification sont précisées dans la suite correspondant le plus souvent à l'un des schémas des figures 1.6 et 1.7.

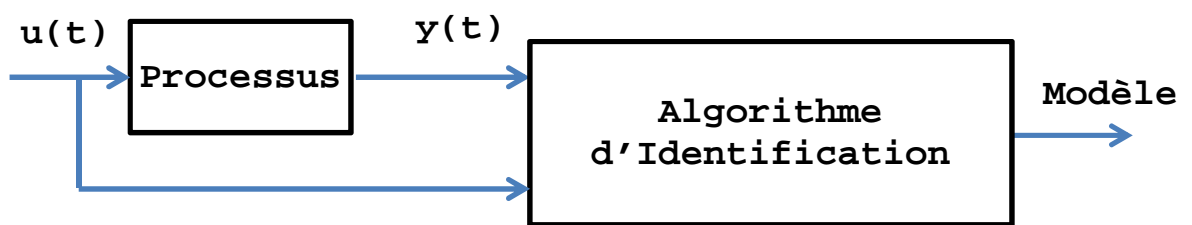


Fig. 1.6 : Identification à partir du comportement entrée-sortie.

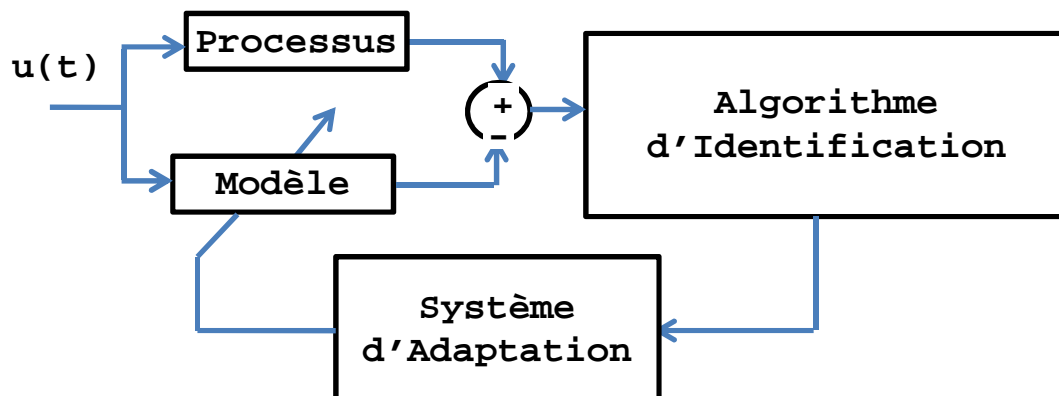


Fig. 1.7: Identification de type paramétrique.



### 1.5 Adaptation et simplification des modèles

Le choix d'un modèle « optimum » diffère considérablement en fonction de l'objectif. Nous avons vu par exemple que pour un processus non linéaire, le modèle utilisable dans un fonctionnement en régulateur autour d'un point de consigne peut parfois être choisi linéaire, par contre si on s'intéresse au comportement du processus pendant la phase d'évolution qui a permis d'atteindre ce régime permanent, le choix du modèle précédent pourrait conduire à des résultats aberrants.

De même pour un processus possédant des ariables de dynamiques très séparées, par exemple, une ariable lente et une variable rapide, il peut être intéressant et même parfois nécessaire d'utiliser différents modèles suivant qu'on s'intéresse aux variations lentes ou rapides du processus. Dans un problème de régulation, il n'est pas toujours nécessaire de conserver tous les modes d'un modèle linéaire d'un processus dont la présence peut parfois compliquer le calcul sans pour autant permettre, compte tenu de la précision de l'identification et de celle du comportement souhaité, d'accroître les performances du processus réel.

D'autre part, il s'avère souvent très intéressant de pouvoir passer d'un modèle continu à un modèle discret ou d'un modèle de type matrice de transfert à un modèle d'état, la forme de ce dernier n'étant pas elle-même indifférente.

Pour ces diverses raisons, nous avons attaché une grande importance, dans ce document, à la simplification et à la transformation des modèles ainsi qu'au passage d'un type de modèle à un autre.