MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE BATNA 2FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE : 2éme Année

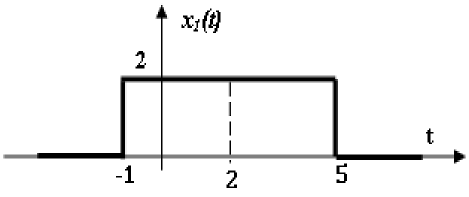
Solution Examen final

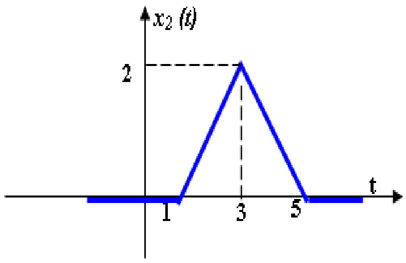
Semestre : 04

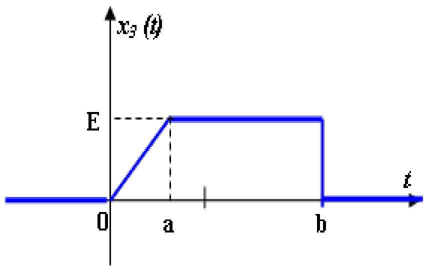
•Matière :TS...... •Filière :ELT •Date :.........

Exercice 1 : 7pts

1. Donner les expressions mathématiques des signaux suivants :





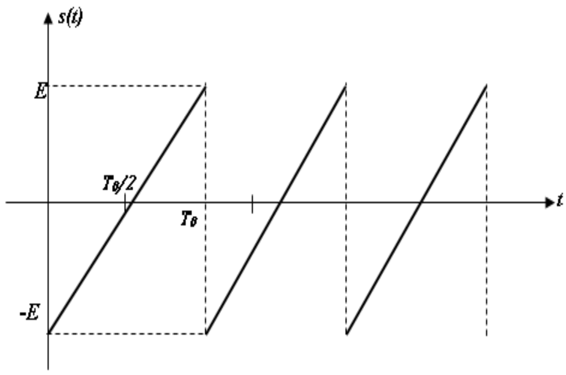


2. Exprimer les signaux $x_1(t)$ $x_2(t)$ l'aide des signaux échelons unité *u(t)* et rampe *r(t).*
3. Calculer l'énergie des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et $x_3(t)$

Exercice 2 : 8pts

On donne un signal périodique **impair** de période T_0 définie comme suit :

$$s(t) = E\left(\frac{2}{T}t - 1\right) \quad pour \quad 0 < t < T_0$$



1 Calculer les coefficients de série de Fourier trigonométrique ($a_0, a_n \; et \; b_n$)
2 Déduire la forme alternée (cosinus).
3 Tracer le spectre unilatéral d'amplitude et de phase jusqu'à l'ordre **3** de *s(t).*
4 Calculer la valeur efficace de s***(t)*** on utilisant l'égalité de Parseval jusqu'à l'ordre **3** (domaine fréquentiel).

Exercice 3: 5pts

Soit le signal $x(t)$:
Ce signal est définie par:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t < 0 \\ 2\,e^{-t} & pour \quad t \geq 0 \end{cases}$$

On donne : $\int \frac{dx}{\alpha^2+x^2} = \frac{1}{\alpha} arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) + cte$

1. Calculer la transformée de Fourier $X(f)$. Déduire le module $|X(f)|$
2. Calculer l'énergie de $x(t)$ par deux méthodes (temporel et fréquentiel).

Solutions

Exercice 1 : 7 pts

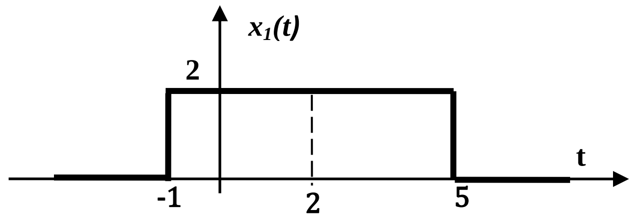
$$x_1(t) = 2rect\left(\frac{t-2}{6}\right) = A.rec[\frac{(t-\tau)}{T}$$

Ou :

$$A = 2, \tau = 2\ et\ T = 6$$

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & si -1 < t < 5 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1



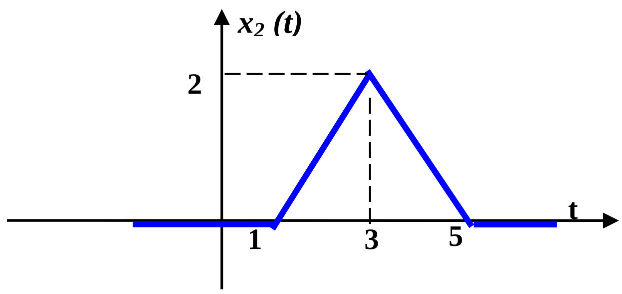
$$x_2(t) = 2\ tri\left(\frac{t-3}{2}\right) = A.tri\left[\frac{(t-\tau)}{\frac{1}{2}T}\right]$$

$A = 2, \tau = 3\ et\ T = 4$

Ou :

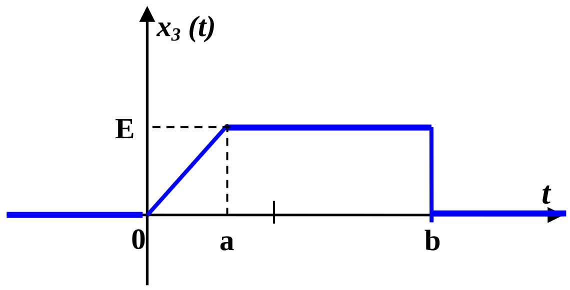
$$x_2(t) = \begin{cases} t-1 & si\ 1 < t < 3 \\ 5-t & si\ 3 < t < 5 \\ 0\ ailleurs & \end{cases}$$

1



$$c) x_3(t) = \begin{cases} \frac{E}{a}t & si 0 \le t \le a \\ E & si\ a \le t \le b \\ 0\ ailleurs & \end{cases}$$

1



Exprimer le signal $x_1(t)$ et $x_2(t)$ l'aide des signaux échelons unité *u(t) et rampe*

$x_1(t) = 2u(t+1) - 2u(t-5)$ 1

$x_2(t) = 2r(t-1) - 4r(t-3) + 2r(t-5)$ 1

3 Calculer l'énergie des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et $x_3(t)$on déduire la puissance dans chaque cas.

$E_{s1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2 d\,t = \int_{-1}^{5} |2|^2 d\,t = [4t\,]_{-1}^{5}$=24 Joules 0.75

$$E_{s2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(t)|^2 d\,t = \int_{1}^{3} |t-1|^2 d\,t + \int_{3}^{+5} |5-t|^2 d\,t$$

$$\int (at+b)^n dt = \frac{1}{a(n+1)}(at+b)^{n+1} + Cte$$

$E_{s2} = \left.\frac{(t-1)^3}{3}\right|_1^3 + \left.\frac{(5-t)^3}{-3}\right|_3^5 = \frac{16}{3} \Rightarrow$ signal à énergie finie 0.75

$E_{s3} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_3(t)|^2 d\,t = \int_0^a \left|\frac{E}{a}t\right|^2 dt + \int_a^b |E|^2 dt = \left(\frac{E}{a}\right)^2 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a + E^2[t]_a^b = E^2\left(b - \frac{2}{3}a\right)$ 0.5

Exercice 2

1. coefficients de série de Fourier de ***s(t)***

On définit un signal impair

périodique de période T comme suit :

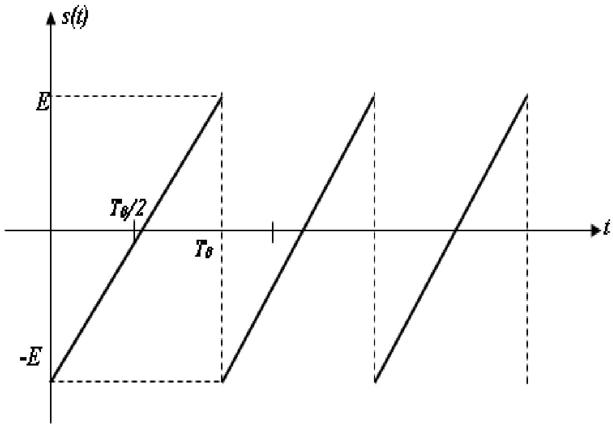
$$s(t) = E(\frac{2}{T_0}t - 1) \quad 0< t<T$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\, cos(n\omega_0 t) + b_n\, sin(n\omega_0 t)]$$

$s(t)$est un signal impair $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a_0 = 0}$ 0.5

et $\boldsymbol{a_n = 0}$ 0.5

$\boldsymbol{b_n \neq 0}$ 0.5



$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[\, b_n\, sin(n\omega_0 t)]$$ 0.5

Calcul de $\boldsymbol{b_n}$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} s(t)\, \sin(n\omega_0 t)\, dt}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$ 0.5

$$b_n = \frac{4}{T_0}\left[\int_0^{T/2} E(\frac{2}{T}t - 1)\sin(n\boldsymbol{\omega_0}t)\, dt\right] = \frac{4E}{T_0}\left[\int_0^{T/2} (\frac{2}{T}t - 1)\sin(n\boldsymbol{\omega_0}t)\, dt\right]$$

L'intégration par partie est : $\int_a^b u\, v' dt = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.vdt$

$$u = \frac{2}{T}t - 1 \rightarrow u' = \frac{2}{T_O}$$

$$v' = sin(n\boldsymbol{\omega_0}t) \rightarrow v = -\frac{1}{n\boldsymbol{\omega_0}}cos(n\boldsymbol{\omega_0}t)$$

$$b_n = \frac{4E}{T_0}\left[-\left(\frac{2}{T}t - 1\right).\frac{1}{n\boldsymbol{\omega_0}}cos(n\boldsymbol{\omega_0}t)\Big|_0^{T_0/2} - \int_0^{T/2}\frac{2}{T_0 n\boldsymbol{\omega_0}}\cos(n\boldsymbol{\omega_0}t)\, dt\right]$$

1

$$b_n = \frac{4E}{T_0}\left[-\left(\frac{2}{T}t - 1\right).\frac{1}{n\boldsymbol{\omega_0}}cos(n\boldsymbol{\omega_0}t)\Big|_0^{T_0/2} - \int_0^{T/2}\frac{2}{T_0 n\boldsymbol{\omega_0}}\cos(n\boldsymbol{\omega_0}t)\, dt\right]$$

$$b_n = -\frac{4E}{n\boldsymbol{\omega_0}T_0}\left[cos(n\boldsymbol{\omega_0}t)|_0^{T_0/2} - \underbrace{\frac{2}{T_0}(\frac{1}{n\boldsymbol{\omega_0}}sin(n\boldsymbol{\omega_0}t)\Big|_0^{T_0/2}}_{0}\right]$$

$$b_n = -\frac{4E}{n\boldsymbol{\omega_0}T_0} = -\frac{4E}{n\boldsymbol{2\pi f_0}T_0} = -\frac{2E}{n\pi}$$ 0.5

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2E}{n\pi}sin(n\omega_0 t)$$ $\boldsymbol{pour\ n = 1, 2, 3, 4}$ …………..

2. Déduire la forme alternée (cosinus) :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$ 0.5

$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \frac{2E}{\pi n}$ 0.5 $\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = -artctan\,\frac{\frac{-2E}{\pi n}}{0} = \frac{\pi}{2}$ 0.5

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E}{\pi n} \cos\left(n\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$ 0.5

3. Spectres unilatéral d'amplitude et de phase jusqu'à l'ordre 4 de *s(t)* ;

$A_n = \frac{2E}{\pi n}$

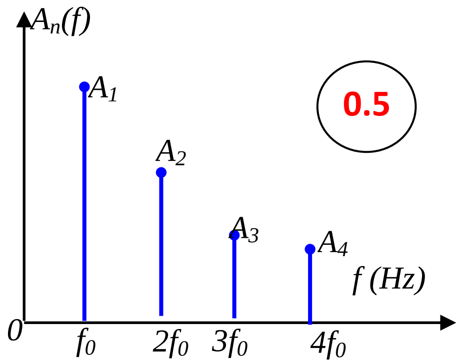
$A_0 = a_0 = 0$

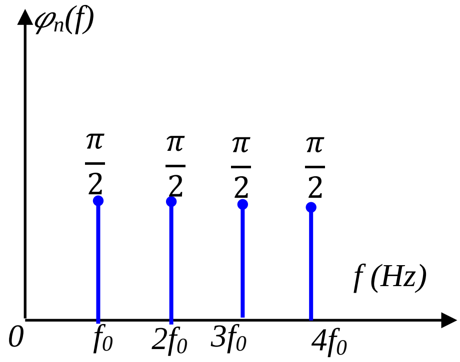
$A_1 = \frac{2E}{\pi}$

$A_2 = \frac{E}{\pi}$

$A_3 = \frac{2E}{3\pi}$

$A_4 = \frac{E}{2\pi}$





0.5

Fig.1 **:** *Spectre d'amplitude unilatéral* *Fig.2 : Spectre de phase unilatéral*

4. Valeur efficace de s***(t)*** on utilisant l'égalité de Parseval jusqu'à l'ordre 3 (domaine fréquentiel).

$$P = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2E}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{E}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2E}{3\pi}\right)^2\right] = \frac{2E^2}{\pi^2}\frac{49}{36}$$ 0.5

Valeur efficace

$$P = S_{eff}^2 = \sqrt{\left(\frac{2.E^2}{\pi^2}\frac{49}{18}\right)} \Longrightarrow S_{eff} = \frac{E}{\pi}\frac{7}{3\sqrt{2}}$$ 0.5

EXERCICE 3 5pts

$$(t) = \begin{cases} 0 \quad pour t < 0 \\ 2e^{-t} pour t \geq 0 \end{cases}$$

- Solution

la transformé de Fourier

$$\underline{S}(f) = TF[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-t}e^{-j2\pi ft}dt = \mathbf{2}\int_0^{+\infty} e^{-t(1+j2\pi f)}dt$$ 1

$$\underline{S}(f) = 2\left[-\frac{1}{(1+j2\pi f)}e^{-t(a+j2\pi f)}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{(1+j2\pi f)}$$ 0.5

$$\underline{S}(f) = \frac{1}{(1+j2\pi f)} = \frac{2}{(1^2+4\pi^2 f^2)} - j\frac{4\pi f}{(a^2+4\pi^2 f^2)}$$ 0.5

D'où le module de $\underline{S}(f)$

$S(f) = \frac{2}{\sqrt{(1+4\pi^2 f^2)}}$ 1

Energie du signal d'après son expression temporelle

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |2e^{-t}|^2 dt = 4\int_{0}^{+\infty} e^{-2t} dt = 4\left[-\frac{1}{2}e^{-t}\right]_0^{\infty} = \frac{4}{2} = 2$$ 1

Vérifier l'égalité de Parseval à partir de l'expression de la transformé de Fourier du signal

L'égalité de Parseval donne :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{(1+4\pi^2 f^2)}}\right|^2 df = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+4\pi^2 f^2)} df = \frac{4}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + f^2\right)} df$$

Rappel :

0.5

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) + cste$$

$$E_s = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + f^2\right)} df = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{\frac{a}{2\pi}} arctan\left(\frac{f}{\frac{a}{2\pi}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\pi}\left[arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$ 0.5

$E_s = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = 2 \Rightarrow$ *l'égalite de Parseval est bien verifiée*