Université Batna2, Faculté de Technologie, Département d'Electrotechnique
Filières : Electrotechnique & Electromécanique/ Licence L2/ S3
Matière: *Electrotechnique Fondamentale 1*

Solution TD N° 1

Nombres complexes &
Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité

Exercice 1

Soient les deux nombres complexes suivants : $\underline{Z}_1 = 1 + 3j$ et $\underline{Z}_2 = 2 - 4j$

1. Le module et l'argument des complexes $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$:

$|\underline{Z}_1| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$, $\quad \text{Arg}(\underline{Z}_1) = \text{Arctang}\left(\frac{3}{1}\right) = 71°.56$

$|\underline{Z}_2| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20}$, $\quad \text{Arg}(\underline{Z}_2) = \text{Arctang}\left(\frac{-4}{2}\right) = -63°.43$

2. La forme trigonométrique de $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$:

$\underline{Z}_1 = |Z_1|[\cos\theta_1 + j\sin\theta_1] = \sqrt{10}[\cos(71°.56) + j\sin(71°.56)]$

$\underline{Z}_2 = |Z_2|[\cos\theta_2 + j\sin\theta_2] = \sqrt{20}[\cos(-63°.43) + j\sin(-63°.43)]$

3. La forme exponentielle de $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$

$\underline{Z}_1 = |\underline{Z}_1|e^{j\theta_1} = \sqrt{10}e^{j71°.56}$

$\underline{Z}_2 = |\underline{Z}_2|e^{j\theta_2} = \sqrt{20}e^{-j63°.43}$

4. La forme Polaire de $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$

$\underline{Z}_1 = |\underline{Z}_1|\angle\theta_1 = \sqrt{10}\angle 71°.56$

$\underline{Z}_2 = |\underline{Z}_2|\angle\theta_2 = \sqrt{20}\angle - 63°.43$

Exercice 2

Données : $R = 10\Omega, L_1\omega = 24\Omega$, $L_2\omega = 12\Omega$, $\frac{1}{C\omega} = 8\Omega$

Alors les impédances correspondantes sont : $\underline{Z}_R = 10\Omega$, $\underline{Z}_{L1} = j24\ [\Omega]$, $\underline{Z}_{L2} = j12\ [\Omega]$, $\underline{Z}_C = -j8\ [\Omega]$,

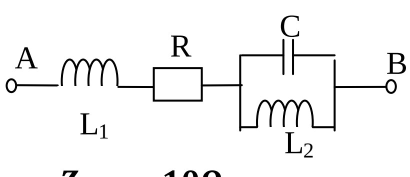
1. Détermination des impédances complexes totales $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, et $\underline{Z}_3$, entre le point A et B des circuits suivants :

1.1 Premier circuit : ***Détermination de l'impédance complexe totale*** $\underline{Z}_{1eq}$

$$\underline{Z}_{1eq} = \underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_R + (\underline{Z}_C // \underline{Z}_{L2})$$

$$(\underline{Z}_C // \underline{Z}_{L2}) = \frac{\underline{Z}_C \times \underline{Z}_{L2}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{L2}} = \frac{(-j8)(j12)}{-j8 + j12} = \frac{96}{j4} \times \frac{j}{j} = -24j$$

$$\underline{Z}_{1eq} = \underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_R + (\underline{Z}_C // \underline{Z}_{L2}) = j24 + 10 - j24 = 10\Omega$$



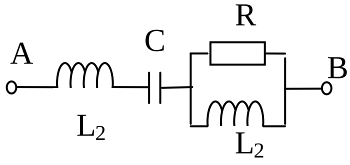
$$\boldsymbol{\underline{Z}_{1eq} = 10\Omega}$$

1.2 Deuxième circuit : ***Détermination de l'impédance complexe totale*** $\underline{Z}_{2eq}$

$$\underline{Z}_{2eq} = \underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_C + (\underline{Z}_R // \underline{Z}_{L2})$$

$$(\underline{Z}_R // \underline{Z}_{L2}) = \frac{\underline{Z}_R \times \underline{Z}_{L2}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L2}} = \frac{10(j12)}{10 + j12} = \frac{120j}{10 + j12} \times \frac{(10 - j12)}{(10 - j12)} = 5.9 + j4.91$$

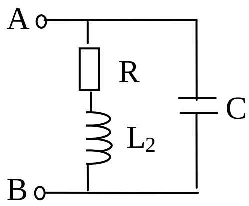
$$\underline{Z}_{2eq} = j12 - j8 + 5.9 + j4.91 = 5.9 + j8.91$$



$$\boldsymbol{\underline{Z}_{2eq} = 6 + j9}$$

1.3 Troisième circuit : ***Détermination de l'impédance complexe totale $\underline{Z}_{3eq}$***

$$\underline{Z}_{3eq} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L2})//\underline{Z}_C = \frac{(10+j12)(-j8)}{10+j12-j8}$$
$$= \frac{-j80+96}{10+j4} \times \frac{10-j4}{10-j4} = 5.51 - j10.2$$

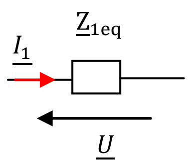
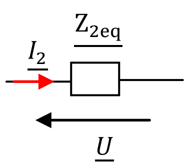
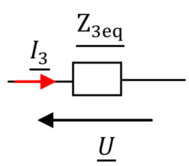
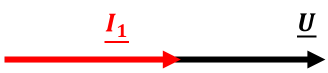
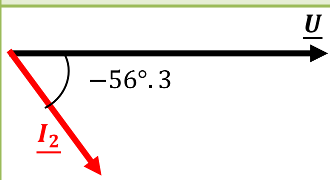
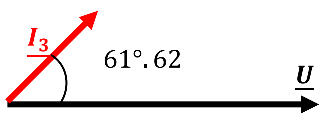


$$\boldsymbol{\underline{Z}_{3eq} = 5.51 - j10.2}$$

2. Nature ainsi que déphasage entre la tension **U** et le courant **I** et aux bornes de chaque impédance.

	Premier Circuit	**Deuxième circuit**	**Troisième circuit**
Impédance	$\underline{Z}_{1eq} = 10\Omega$	$\underline{Z}_{2eq} = 6 + j9$	$\underline{Z}_{3eq} = 5.5 - j10.2$
Nature de l'impédance	**Impédance Résistive** car la réactance $X = 0$	**Impédance Inductive** car la réactance $X = 9 > 0$	**Impédance Capacitive** car la réactance $X = -10.2 < 0$
Déphasage entre la tension U **et le courant** I **aux bornes de l'impédance**	$\mathrm{Arg}(\underline{U}) - \mathrm{Arg}(\underline{I}) = \mathrm{Arg}(\underline{Z}_{1eq}) = 0°$ $\Rightarrow$ Le courant et la tension sont en phase.	$\mathrm{Arg}(\underline{U}) - \mathrm{Arg}(\underline{I}) = \mathrm{Arg}(\underline{Z}_{2eq}) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{9}{6}\right) = 56°.3$ $\Rightarrow$ Le courant est en retard par rapport à la tension.	$\mathrm{Arg}(\underline{U}) - \mathrm{Arg}(\underline{I}) = \mathrm{Arg}(\underline{Z}_{3eq}) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{-10.2}{5.5}\right) = -61°.62$ $\Rightarrow$ Le courant est en avance par rapport à la tension.

3. Représentation de Fresnel du courant **I** et de la tension **U** de chaque cas (la tension **U** est considérée à l'origine des phases).

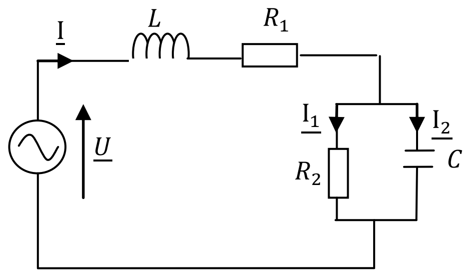
	Premier Circuit	**Deuxième circuit**	**Troisième circuit**
Impédance	$\underline{Z}_{1eq} = 10\Omega$	$\underline{Z}_{2eq} = 6 + j9$	$\underline{Z}_{3eq} = 5.5 - j10.2$
Circuit Equivalent			
Phases de la tension $\underline{U}$ et du courant $\underline{I}$	$\underline{U} = U\angle 0$ $\mathrm{Arg}(\underline{I}_1) = \mathrm{Arg}(\underline{U}) - \mathrm{Arg}(\underline{Z}_{1eq}) = 0°$	$\underline{U} = U\angle 0$ $\mathrm{Arg}(\underline{I}_2) = \mathrm{Arg}(\underline{U}) - \mathrm{Arg}(\underline{Z}_{2eq}) = -56°.3$	$\underline{U} = U\angle 0$ $\mathrm{Arg}(\underline{I}_3) = \mathrm{Arg}(\underline{U}) - \mathrm{Arg}(\underline{Z}_{2eq}) = 61°.62$
Représentation de Fresnel			

Exercice 3

Données: $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $C = 120\mu F$, $L = 20mH$.

Les impédances correspondantes : $\underline{Z}_{R1} = 5\Omega$, $\underline{Z}_{R2} = 10\Omega$, $\underline{Z}_L = jL\omega = j20 \times 10^{-3} 314 = j6.28$,

$\underline{Z}_C = \frac{-1}{C\omega} j = \frac{-1}{120\times10^{-6}\times314} j = -j26.54$



1. Calcul de l'impédance complexe équivalente du circuit :

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{R1} + (\underline{Z}_{R2}//\underline{Z}_C)$$

$$(\underline{Z}_{R2}//\underline{Z}_C) = \frac{\underline{Z}_{R2} \times \underline{Z}_C}{\underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_C} = \frac{10(-j26.54)}{10 - j26.54}$$

$$= \frac{-j265.4}{10 - j26.54} \times \frac{10 + j26.54}{10 + j26.54} = \frac{-j2654 + 7043.71}{100 + 704.37} = 8.75 - j3.3$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{R1} + (\underline{Z}_{R2}//\underline{Z}_C) = j6.28 + 5 + 8.75 - j3.3 = 13.75 + j3$$

$$|\underline{Z}_T| = \sqrt{(13.75)^2 + (3)^2} = 14.07\Omega$$

$$Arg\,(\underline{Z}_T) = Arctang\left(\frac{3}{13.75}\right) = 12°.3$$

2. En Déduire l'admittance complexe.

$$\underline{Y}_t = \frac{1}{\underline{Z}_t} = \frac{1}{14.07\angle12.3°} = 0.071\angle - 12.3° = 0.07 - j0.015$$

3. Calcul des intensités complexes $\underline{I}$, , $\underline{I}_1$ *et* $\underline{I}_2$.

3.1 Courant $\underline{I}$: $\underline{U} = \underline{Z}_t.\underline{I} \Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_t} = \underline{U} \times \underline{Y}_t = (120\angle0) \times (0.071\angle - 12.3°) = 8.55\angle - 12.3°$

3.2 Courant $\underline{I}_1$: Diviseur de courant :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_C} \times \underline{I} = \frac{-j26.54}{10 - j26.54} \times \underline{I} = \frac{-j26.54(10 + j26.54)}{(10 - j26.54)(10 + j26.54)} \times \underline{I} = \frac{704.36 - j265.4}{100 + 704.36} \times \underline{I}$$

$$= (0.875 - j0.329)\underline{I} = (0.94\angle - 20.64°) \times (8.55\angle - 12.3°) = 8\angle - 33°$$

3.3 Courant $\underline{I}_2$: Diviseur de courant :

$$\underline{I}_2 = \frac{Z_{R2}}{Z_{R2} + Z_C} \times \underline{I} = \frac{10}{10 - j26.54} \times \underline{I} = \frac{10\,(10 + j26.54)}{(10 - j26.54)(10 + j26.54)} \times \underline{I} = \frac{100 + j265.54}{100 + 704.36} \times \underline{I}$$

$$= (0.124 + j0.33) \times \underline{I} = (0.35\angle69.4°) \times (8.85\angle - 12.3) = 3\angle57°$$

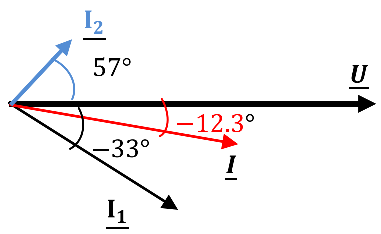
4. Le facteur de puissance du circuit : $K = cos\varphi = cos(12.3°) = 0.977$

5. ***Le déphasage est***: $\varphi == Arg(\underline{U}) - Arg(\underline{I}_1) = Arg(Z_t) = 12°.3$

$\Longrightarrow$ Le courant est en retard par rapport à la tension. C'est un déphasage arrière « **AR** »

6. Représentation de Fresnel de la tension $\underline{U}$ et des courants $\underline{I}$, , $\underline{I}_1$ *et* $\underline{I}_2$.

$\underline{U} = 120\angle0°, \underline{I} = 8.55\angle - 12.3°, \underline{I}_1 = 8\angle - 33°, \underline{I}_2 = 3\angle57°$



Exercice 4 :

Calcul des courants complexes $\underline{I}_1, \underline{I}_2 et \underline{I}_3$ sous forme exponentielle :

I

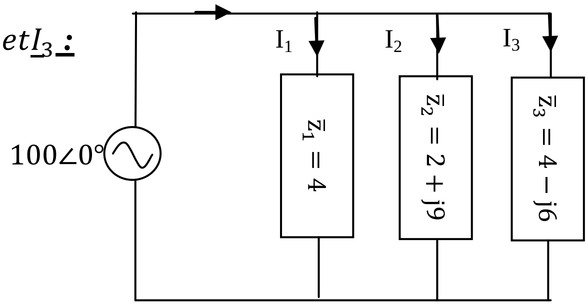
Les impédances en forme exponentielle :

$\underline{Z}_1 = 4 \qquad \Longrightarrow |\underline{Z}_1| = 4\Omega, \mathrm{Arg}\ (Z_1) = 0 \underline{Z}_1 = 4e^{j0}$

$\underline{Z}_2 = 2 + j9 \qquad \Longrightarrow |\underline{Z}_2| = 9.22\Omega,\ \mathrm{Arg}(\underline{Z}_2) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{9}{2}\right) = 77°.47 \underline{Z}_2 = 9.22e^{j77°.47}$

$\underline{Z}_3 = 4 - j6 \qquad \Longrightarrow |\underline{Z}_3| = 7.21\Omega,\ \mathrm{Arg}(\underline{Z}_3) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{-6}{4}\right) = -56°.31 \underline{Z}_3 = 7.21e^{-j56°.31}$

La loi d'ohm pour chaque branche nous donne les $\underline{I}_1, \underline{I}_2 et \underline{I}_3$:



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{100e^{j0°}}{4e^{j0°}} = 25e^{j0°}[A]$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{100e^{j0°}}{9.21e^{j77.47°}} = 10.85e^{-j77.47°}[A]$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3} = \frac{100e^{j0°}}{7.21e^{-j56.3°}} = 13.87e^{j56.3°}\ [A]$$

La loi des nœuds nous donne le courant $\underline{I}$ somme des courants $\underline{I}_1, \underline{I}_2 et \underline{I}_3$:

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

Pour la somme on utilise la forme cartésienne :

$\underline{I}_1 = 25[A]$

$\underline{I}_2 = 2.35 - j10.59\ [A]$

$\underline{I}_3 = 7.69 + j11.54\ \ [A]$

Alors $\quad \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 25 + 2.35 - j10.59 + 7.69 + j11.54 = 35.04 + j0.95$

$|\underline{I}| = \sqrt{(35.04)^2 + (0.95)^2} = 35A$

$\mathrm{Arg}(\underline{I}) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{0.95}{35.04}\right) = 1°.55$

1) Calcul des puissances active, réactive et apparente dans les trois impédances.

Impédance (charge)	$\underline{Z}_1 = 4$	$2 + j9$	$\underline{Z}_3 = 4 - j6$
$P = UI.cos\varphi$	$P_1 = 100 \times 25.\cos(0°)$ $P_1 = \mathbf{2500W}$	$P_2 = 100 \times 10.85.\cos(77°.47)$ $P_2 = \mathbf{235.4W}$	$P_3 = 100 \times 13.86\cos(-56.31)$ $\boldsymbol{P_3 = 769.37W}$
$Q = UI.sin\varphi$	$Q_1 = 100 \times 25.\sin(0°)$ $Q_1 = \mathbf{0VAR}$	$Q_2 = 100 \times 10.85.\sin(77°.47)$ $Q_2 = \mathbf{1059.16VAR}$	$Q_3 = 100 \times 13.86.\sin(-56.31)$ $Q_3 = \mathbf{-1154VAR}$
$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$	$S_1 = P_1 = \mathbf{2500VA}$	$S_2 = UI = 100 \times 10.85$ $S_2 = \mathbf{1085VA}$	$S_3 = UI = 100 \times 13.87$ $S_3 = \mathbf{1387VA}$

2) Calcul des puissances active, réactive et apparente fournies par la source en utilisant le théorème de Boucherot

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 2500 + 235.4 + 769.37 = 3504.77W$$

$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 1059.15 - 1154 = -94.84VAR$

$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{(3504.77)^2 + (-94.84)^2} = 3506VA$

3) **Facteur de puissance** ***:*** $cos\varphi = \frac{P_T}{S_T} = \frac{3504.77}{3506} = 0.999$

Nature de la charge : Comme $Q_T < 0$ alors la charge est capacitive

4) Vérification des résultats par la méthode du calcul direct des puissances :

Puissance active : $\mathrm{P_T = U \times I \times cos\varphi}$ avec $\varphi_\mathrm{T} = \mathrm{Arg}(\underline{\mathrm{U}}) - \mathrm{Arg}(\underline{\mathrm{I}}) = 0 - 1°.55 = 1°.55$

Alors $\mathrm{P_T} = 100 \times 35 \times \cos(-1°.55) = 3498.72\mathrm{W}$

Puissance réactive : $\mathrm{Q_T = U \times I \times sin\varphi_T} = 100 \times 35 \times \sin(-1°.55) = -94.67\mathrm{VAR}$

Puissance apparente : $\mathrm{S_T = U \times I} = 100 \times 35 = 3500\mathrm{VA}$