Université de Batna 2I
Faculté de Technologie,
Département LMD (ST)

Matière : *Electrotechnique Fondamentale 1*

2eme Année Licence S3

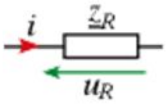
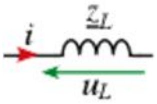
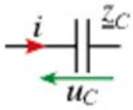
TDN° 1

Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité
Solution

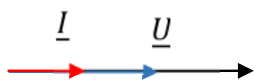
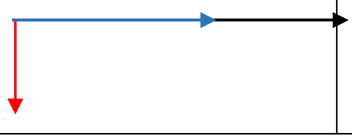
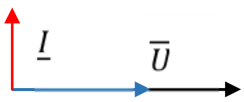
Exercice 1

$u(t) = \sqrt{2}100\sin(\omega t + \varphi_u)$,f= 50 Hz , R=10 Ω, L= 100 mH et C= 100 µF.

1) Calculer les impédances Z_R, Z_L et Z_C , déduire les admittances $\underline{Y_R}$, $\underline{Y_L}$ et $\underline{Y_C}$

	Résistance	**Inductance pure**	**Capacité pure**
			
forme cartésienne (Ω)	$\underline{Z_R}$=R $\arg(\underline{Z_R}) = 0^\circ = \varphi_R$ $\underline{Z_R}$=R=10Ω	$\underline{Z_L} = X_L = jL\omega$ / $\arg(\underline{Z_L}) = \frac{\pi}{2} = \varphi_L$ $\underline{Z_L} = j \times 100 \times 10^{-3} \times 2 \times \pi \times 50$ $\underline{Z_L} = j31,4\Omega$	$\underline{Z_C} = X_C = -\frac{j}{C\omega}$ $arg(\underline{Z_C}) = \frac{-\pi}{2} = \varphi_C$ $\underline{Z_C} = -\frac{j}{(100 \times 10^{-6}) \times 2 \times \pi \times 50}$ $\underline{Z_C} = -j\ 31,8\Omega$
Forme polaire	$\underline{Z_R} = Z_R\angle\varphi_R$ $\underline{Z_R} = 10\angle 0^\circ\Omega$	$\underline{Z_L} = Z_L\angle\varphi_L$ $\underline{Z_L} = 31.4\angle\pi/2\ \Omega$	$\underline{Z_C} = Z_C\angle\varphi_C$ $\underline{Z_C} = 31.8\angle -\pi/2\ \Omega$
Forme exponentielle	$\underline{Z_R} = Z_R e^{j\varphi_R}\ \Omega$ $\underline{Z_R} = 10e^{j0}\Omega$	$\underline{Z_L} = Z_L e^{j\varphi_L}\ \Omega$ $\underline{Z_L} = 31.4\ e^{j\pi/2}\Omega$	$\underline{Z_C} = Z_C e^{j\varphi_C}\ \Omega$ $\underline{Z_C} = 31.8\ e^{-j.\pi/2}\Omega$
Admittance cartésienne	$\underline{Y_R} = \frac{1}{R}$ $\underline{Y_R}$=R=0.1 Ω^{-1} $\underline{Y_R} = 0.1\ \angle 0^\circ\ \Omega^{-1}$	$Y_L = -j\frac{1}{L\omega}$ $\underline{Y_L} = -j0.0318\ \ \Omega^{-1}$ $\underline{Y_L} = 0.0318\angle -\pi/2\ \Omega^{-1}$	$\underline{Y_C} = jC\omega$ $\underline{Y_C} = j\ 0.0314\ \Omega^{-1}$ $\underline{Y_C} = 0.0314\angle\pi/2\ \Omega^{-1}$

2) Valeur efficace du courant pour chaque cas on déduire les expressions : instantanée, cartésienne et polaire, ainsi que le déphasage entre le courant $i(t)$ et la tension $u(t) = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$, , $\varphi_u = 0$ (tension prise comme origine des phases).

	Résistance	**Inductance pure**	**Capacité pure**
Courant efficace	$I_R = \frac{U}{Z_R}$ $I_R = \frac{100}{10} = 10A$	$I_L = \frac{U}{Z_L}$ $I_L = \frac{100}{31.4} = 3.18A$	$I_C = \frac{U}{Z_C}$ $I_C = \frac{100}{31.8} = 3.14\ A$
Courant Complexe	$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_R}$ $\underline{I}_R = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Z_R e^{j\varphi_R}}$ $\underline{I}_R = I_R e^{-j\varphi_R}$ $\underline{I}_R = 10e^{j0}\ A$ $\underline{I}_R = 10\angle 0\ A$ $\underline{I}_R = 10(cos0 + jsin0)$ $\underline{I}_R = (10 + j0)\ A$	$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_L}$ $\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_L} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Z_L e^{j\varphi_L}}$ $\underline{I}_L = I_L e^{-j\varphi_L}$ $\underline{I}_L = 3.18\ e^{-j\pi/2} A$ $\underline{I}_L = 3.18\angle -\pi/2\ A$ $\underline{I}_L = 3.18(cos\,\pi/2 - jsin\,\pi/2)$ $\underline{I}_L = (0 - j\ 3.18)$ A	$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_C}$ $\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_C} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Z_C e^{j\varphi_C}}$ $\underline{I}_C = I_C e^{-j\varphi_C}$ $\underline{I}_c = 3.14\ e^{j\pi/2}\ A$ $\underline{I}_c = 3.14\angle\pi/2\ A$ $\underline{I}_C = 3.14(cos\,\pi/2 + jsin\,\pi/2)$ $\underline{I}_C = (0 + j3.14)\ A$
Courant instantané	$i_R(t) = I_R\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_{iR})$ $\varphi_{iR} = \varphi_u - \varphi_R = -\varphi_R$ $i_R(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 0)$	$i_L(t) = I_L\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_{iL})$ $\varphi_{iL} = \varphi_u - \varphi_L = -\varphi_L$ $i_L(t) = 3.18\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/2)$	$i_c(t) = I_C\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_{iC})$ $\varphi_{iC} = \varphi_u - \varphi_C = -\varphi_C$ $i_c(t) = 3.18\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/2)$
Déphasage Courant / tension	$\underline{I}$ est en phase avec $\underline{U}$	$\underline{I}$ est en retard de $\pi/2$ / à la tension $\underline{U}$	$\underline{I}$ est avance de $\pi/2$ / à la tension $\underline{U}$
Admittance cartésienne			

Exercice 2

1) Tensions $\underline{V_1}$ et $\underline{V_2}$ si la fréquence d'alimentation est de 4 kHz.

- $\underline{V_1} = \underline{I}.\underline{Z_1}$ / $\underline{I} = 6\angle 0^\circ$

$\underline{Z_1} = R_1 - jX_C$ / $R_1 = 8\Omega$, $X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(4000)(2.653\times10^{-6})} = 15\ \Omega$

$\underline{Z_1} = (8 - j15)\Omega$ Ou bien $\underline{Z_1} = Z_1\angle\varphi_1$

$Z_1 = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17\Omega$, $\varphi_1 = \arg\left(\underline{Z_1}\right) = Arctg(-\frac{15}{8}) = -61.93^\circ \Rightarrow$ $\underline{Z_1} = 17\angle -61.93^\circ$

Donc on peut déduire l'expression de $\underline{V_1}$:

$\underline{V_1} = (6\angle 0^\circ) \times (17\angle -61.93^\circ) = 102\angle -61.93^\circ\ V$ Ou bien $\underline{V_1} = (48 - j90)V$

- $\underline{V_2} = \underline{I}.\underline{Z_2}$ / $\underline{I} = 6\angle 0$

$\underline{Z_2} = R_2 + jX_L$ / $R_2 = 5\Omega$, $X_L = L\omega = L.2\pi f = (0.477\times10^{-3})\times 2\pi(4000) = 12\Omega$

$\underline{Z_2} = (5 + j12)\Omega$ *ou bien* $\underline{Z_2} = Z_2\angle\varphi_2$

$Z_1 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\Omega$, $\varphi_1 = \arg\left(\underline{Z_2}\right) = Artg(+\frac{12}{5}) = 67.38^\circ$........$\underline{Z_2} = 13\angle 67.38^\circ$

L'expression de $\underline{V_2}$: et donc :

$\underline{V_2} = (6\angle 0^\circ) \times (13\angle 67.38^\circ) = 78\angle 67.38^\circ V$ Ou $\underline{V_2} = (30 + j72)V$

2) La tension $\underline{V} = \underline{V_1} + \underline{V_2} = (48 - j90) + (30 + j72) = (78 - j18)$ V ou $\underline{V} = 80\angle -13^\circ\ V$

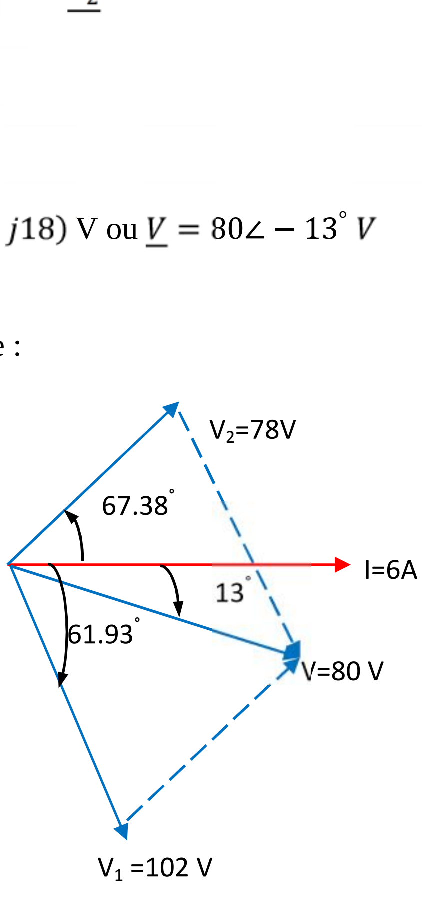
Le déphasage est : $\varphi = -13^\circ$(Impédance capacitive)

Diagramme de Fresnel : Le courant $\underline{I}$ est pris comme origine de phase :

$\underline{V}$ est en retard d'un angle de 13° par rapport au courant $\underline{I}$.

$\underline{V_1}$ est en arrière de 61.93° par rapport au courant $\underline{I}$

$\underline{V_2}$ est en avance de 67.38° par rapport au courant $\underline{I}$



3) Puissances active P, réactive Q et apparente S:

$P = UIcos\varphi = 80\times 6\times\cos(-13°) = 467{,}52$ W

$Q = UIsin\varphi = 80\times 6\times\sin(-13°) = -108$ VAR

$S = UI = 80\times 6 = 480$VA

Exercice 3

U= 200V, f=50Hz. (Tension à l'origine des phases).

1) Calculer l'impédance complexe $\boldsymbol{Z_1}$et $\boldsymbol{Z_2}$ on déduire l'impédance complexe entre **A** et **B**

$\underline{Z_1} = R_1 - jX_C = (25 - j10)\Omega$, $\underline{Z_2} = R_2 + jX_L = (10 + j5)\Omega$,

$Z_1 = \sqrt{25^2 + 10^2}$ =26.93Ω arg (Z1)=- -21.8° $\Rightarrow \underline{Z_1}\angle\varphi_1 = 26.93\angle - 21.8^\circ$

$Z_2 = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18\ \Omega$, arg($Z_1$ 26.57°) $\Rightarrow \underline{Z_2}\angle\varphi_2 = 11.18\angle 26.57^\circ$

$\underline{Z_1}$et // $\underline{Z_2}$

$$\underline{Z_{AB}} = \frac{Z_1Z_2}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} = \frac{(25 - j10) \times (10 + j5)}{(25 - j10) + (10 + j5)} = \frac{(300 + j25)}{(35 - j5)}$$

$$= \frac{(300 + j25) \times (35 + j5)}{(35^2 + 5^2)} = \frac{(10375 + j2375)}{1250} = (8.3 + j\ 1.9)\Omega$$

2) Si on suppose que l'impédance entre les points ***C*** et ***B*** est purement résistive, calculer $\underline{Z_3} = jX$

$\underline{Z_{CB}} = \underline{Z_3} + \underline{Z_{AB}} = jX + (8.3 + j\ 1.9) = 8.3 + j(X + 1.9)$ est purement résistive ⇒

$Img(\underline{Z_{CB}}) = 0 \Rightarrow j(X + 1.9) = O \Rightarrow \boldsymbol{j}X = -j1.9$ (impédance capacitive pure)

Déduire le facteur de puissance du circuit : Z_{CB} est une impédance résistive :

$$\underline{Z_{CB}} = Z_{CB}\angle\varphi = 8.3\angle 0^\circ\Omega$$

Le facteur de puissance $F_p = cos\varphi = 1$

3) valeur efficace du courant efficace ***I.***

$$I = \frac{U}{Z_{CB}} = \frac{200}{8.3} = 24.1\ A$$

Forme polaire et cartésienne

$\underline{I} = I\angle\varphi_i = 24.1\angle 0^\circ\ A$

$$\varphi_i = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{Z_{CB}}) = 0$$

$$\underline{I} = (24.1 + j0)A$$

4) Valeurs efficaces $\boldsymbol{I_1}$ et $\boldsymbol{I_2}$ et formes: cartésienne et polaire.

- **Première méthode Diviseur de courant :**

$$\underline{I_1} = \underline{I}.\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$$

$$\underline{I_1} = 24{,}1\angle 0.\frac{11.18\angle 26.57}{(25-j10)+(10+j5)} = 24{,}1\angle 0\frac{11.18\angle 26.57}{35-5j}$$

$$\underline{I_1} = 24.1\angle 0\frac{11.18\angle 26.57}{35.35\angle -8.13^{\circ}} = 24.1\angle 0 \times 0.316.\angle 34.7^{\circ}$$

$$\underline{I_1} = 7.61\angle 34.7^{\circ}\ A$$

On peut le déduire de la loi des nœuds :

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{I_1} = \underline{I} - \underline{I_2} \ = (7.61\cos(34.7^{\circ}) + j7.61\sin(34.7^{\circ})) - (24.1 + j0)$$

$$\underline{I_2} \ = 17.84 - j4.33 = 18.35\angle -13.64^{\circ}\ A$$

Ou bien utiliser la deuxième équation des courants pour le diviseur de courant

$$\underline{I_2} = \underline{I}.\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$$

$$I_2 = 24{,}1\angle 0.\frac{26.93\angle -21.8}{(25-j10)+(10+j5)} = 24{,}1\angle 0\frac{26.93\angle -21.8}{35-5j}$$

$$24.1\angle 0\frac{26.93\angle -21.8}{35.35\angle -8.13} = 24.1\angle 0 \times 0.762.\angle -13.67^{\circ}\ \text{A}$$

$$I_2 = 18.34.\angle -13.67\ A$$

- **Deuxième méthode:**

$$\underline{Z_1}\underline{I_1} = \underline{U} - \underline{Z_3}\underline{I}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{I_1} = \frac{\underline{U} - \underline{Z_3}\underline{I}}{\underline{Z_1}} = \frac{U\angle 0^{\circ} - 1.9\angle -90 \times 24.1\angle 0^{\circ}}{26.93\angle -21.8^{\circ}} = \frac{200 + j45.79}{26.93\angle -21.8^{\circ}} = \frac{205.14\angle 12.87}{26.93\angle -21.8^{\circ}}$$

$$\underline{I_1} = 7.61\angle 34.67^{\circ}\ A$$

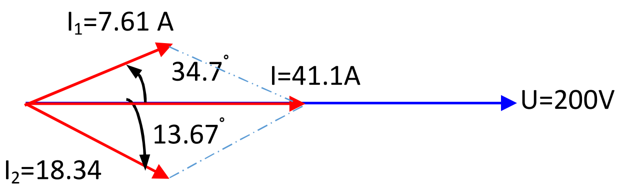
$$\underline{Z_2}\underline{I_2} = \underline{U} - \underline{Z_3}\underline{I}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{I}_2 = \frac{U - \underline{Z}_3\underline{I}}{\underline{Z}_2} = \frac{U\angle 0^\circ - 1.9\angle -90 \times 24.1\angle 0^\circ}{11.18\angle 26.57^\circ} = \frac{200 + j45.79}{11.18\angle 26.57^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = 18.34\angle -13.7^\circ\ A$$

Diagramme Fresnel :



5) Puissances active P, réactive Q et apparente S :

$$P = UIcos\varphi = 200 \times 24.1 \times \cos(0°) = 4820\text{W}$$

$$Q = UIsin\varphi = 0\ \text{VAR}$$

$$S = UI = \text{P} = 4820\ \text{VA}$$

Exercice 4

1) On calcul les puissances de l'installation :

Puissances actives

$$P_t = UIcos\varphi = 220 \times 50 \times 0.9 = 9900W$$
$$P_l = 30 \times 60 = 1800\ W$$
$$P_C = 0$$
$$P_M = UI_M cos\varphi_M?$$

Puissances réactive

$$Q_t = UIsin\varphi = 220 \times 50 \times 0.435 = 4785VAR$$
$$Q_l = 0$$
$$Q_C = -U^2C\omega = 220^2 \times (100 \times 10^{-6}) \times 2 \times \pi \times 50 = -1519.76\ VAR$$
$$Q_{M=?}$$

Méthode de Boucherot

$$\text{P}_t = \sum_{i=1}^{3} P_i = P_M + P_l + P_C$$
$$\text{P}_M = P_t - P_l = 9900 - 1800 = 8100W$$
$$\text{Q}_t = \sum_{i=1}^{3} Q_i = Q_M + Q_l + Q_C$$
$$\text{Q}_t = Q_M + Q_C$$

$$Q_M = Q_t - Q_C = 4785 - (-1519.76) = 6304.76\,VAR$$

$$S_M = \sqrt{P_M^2 + Q_M^2} = \sqrt{8100^2 + 6167.3^{\,2}} = 10264.5\,VA$$

Le courant I_M du moteur

$$I_M = \frac{S_M}{U} = \frac{10180.64}{220} = 46.65A$$

Le facteur de puissance du moteur :

$$cos\varphi_M = \frac{P_M}{S_M} = \frac{8100}{10180.64} = 0.789$$