UNIVERSITE DE BATNA_2 **FACULTE DE MEDECINE**

Corrigé type : **SERIE DE TD N° 7** ***en BIOSTATISTIQUE 2019/2020***

Exercices sur les lois de Probabilités

Exercice n° 01 :

Un service médical reçoit en moyenne 4 appels par période de 8 heures. On désigne par X le nombre d'appels reçus par ce service dans une période de 8 heures.

1. Quelle loi peut-on appliquer ici ?
2. Utiliser cette loi pour calculer P (X > 3), P (X < 4), P (X > 0).

Solution :

1. C'est la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$ qu'on peut utiliser dans ce problème avec : $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
2. $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = 1 - (e^{-4} + 4\,e^{-4} + 8\,e^{-4} + \frac{32}{3}\,e^{-4}) = 1 - \frac{71}{3}\,e^{-4} = 1 - 0.43347 = 56.653\ \%$

   $P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 43.347\ \%$

   $P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - e^{-4} = 1 - 0.0183 = 0.9817$

Exercice n° 02 :

Le nombre de noyades accidentelles est en moyenne de 3 par an pour une population de cent mille (100 000) habitants. Calculer :

1. La probabilité que 3 noyades seraient enregistrées pour cette population durant l'année suivante.
2. La probabilité que 3 noyades seraient enregistrées pour cette population durant les deux années suivantes.
3. La probabilité qu'aucune noyade ne serait enregistrée durant l'année suivante.

Solution :

Le nombre de noyade accidentelles X est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 3$ pour une période de temps égale à une année.

1. $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow P(X = 3) = e^{-3} \frac{3^3}{3!} = 22.404\ \%$
2. ***Méthode n° 1*** : Posons X le nombre de noyades durant la première année et Y le nombre de noyades durant la $2^{ème}$ année, alors on a à calculer P [(X = 0) et (Y = 3) ou bien (X = 1) et (Y = 2) ou bien (X = 2) et (Y = 1) ou bien (X = 3) et (Y = 0)]. Comme il y a indépendance des noyades alors le calcul final sera :

   $P(X = 0) * P(Y = 3) + P(X = 1) * P(Y = 2) + P(X = 2) * P(Y = 1) + P(X = 3) * P(Y = 0)$

   $= e^{-3} * e^{-3} \frac{3^3}{3!} + e^{-3} \frac{3^1}{1!} * e^{-3} \frac{3^2}{2!} + e^{-3} \frac{3^2}{2!} * e^{-3} \frac{3^1}{1!} + e^{-3} \frac{3^3}{3!} * e^{-3} = 36 * e^{-3} * e^{-3} = 8.924\ \%$

   Méthode n° 2 : Si 2 variables X et Y suivent des Lois de Poisson et sont indépendantes :

   $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\mu)$ alors leur somme est une variable $Z = X + Y$ qui suit aussi la loi de Poisson $Z \sim P(\lambda + \mu)$ où on a :

   $$P(Z = k) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} \Rightarrow P(Z = 3) = e^{-(3+3)} \frac{(3+3)^3}{3!} = e^{-6} * 36 = 8.924\ \%$$
3. $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow P(X = 0) = e^{-3} \frac{3^0}{0!} = 0.04979 \approx 4.979\ \%$

Exercice n° 03 :

On s'intéresse à la durée de vie d'un échantillon de 100 souris de laboratoire, après injection d'une molécule à la naissance. On observe que la durée de vie de ces souris est distribuée selon une loi normale autour d'une moyenne de 400 jours et avec un écart type de 8 jours.

1. Quel est le nombre attendu de souris ayant une durée de vie entre 390 et 420 jours
2. A quelle durée de vie correspond le 3ème quartile.
3. A quelle durée de vie correspond le 3ème décile.

Solution :

1) $P(390 < X < 420) = P(\frac{390-400}{8} < Z < \frac{420-400}{8}) = P(-1.25 < Z < 2.5) =$
   $\Pi(2.5) - \Pi(-1.25) = \Pi(2.5) - 1 + \Pi(1.25) = 0.9938 - 1 + 0.8944 = 0.8882 \Rightarrow$
   Le nombre attendu de souris sera de $100 * 0.8882 = 88.82$ souris ou bien 89 souris dont la vie est comprise entre 390 et 420 jours.
2) On cherche un x qui vérifie $P(X < x) = 0.75$
   $P(X < x) = P(\frac{X-400}{8} < \frac{x-400}{8}) = P(Z < \frac{x-400}{8}) = 0.75$
   La table n° 1 donne : $\frac{x-400}{8} = 0.675 \Rightarrow x = 400 + 8 * 0.675 = 405.4$ jours.
3) On cherche un x qui vérifie $P(X < x) = 0.3$
   $P(X < x) = P(\frac{X-400}{8} < \frac{x-400}{8}) = P(Z < \frac{x-400}{8}) = 0.30 \Rightarrow$ Comme $0.3 < 0.5$, cette valeur de 0.3 ne figure pas dans la table n° 1 ; on calcule la valeur de $-(\frac{x-400}{8})$:
   $P(Z < -\frac{x-400}{8}) = 1 - P(Z < \frac{x-400}{8}) = 1 - 0.30 = 0.70$
   La table n° 1 donne : $-\frac{x-400}{8} = 0.525 \Rightarrow x = 400 - 8 * 0.525 = 395.8$ jours

Exercice n° 04 :

Dans une famille la probabilité de naissance d'un enfant gaucher est de 1/5. On sait que cette famille a 9 enfants.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X : nombre de gauchers
2. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 2 gauchers dans cette famille.
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 enfants gauchers.

Solution :

1. Si la variable aléatoire X est le « nombre de gauchers » alors la loi que suit X est binomiale :
   $X \sim> B(9\ ;\ 1/5)$
2. $P(X = 2) = C_9^2\, 0.2^2 * 0.8^7 = 30.199\ \%$
3. $P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - [0.8^9 + 0.30199] = 1 - 0.43621 = 56.379\ \%$

Exercice n° 05 :

Un Chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les enfants. Une étude effectuée auprès d'un millier d'enfants montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à 2 mois et avec un écart type de 1 mois et demi. Sachant que la distribution des âges est normale, on souhaite :

1. Evaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant 5 mois.
2. Evaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après 6 mois.
3. Evaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots entre 3 et 5 mois.

Solution :

1) P (X < 5) = P (Z < $\frac{X-2}{1.5}$) = P (Z < 2) = 97.725 %.

2) P(X > 6) = P (Z > $\frac{6-2}{1.5}$) = P (Z > 2.67) = 1 – P (Z < 2.67) = 1 – 0.9962 = 0.0038

3) P (3 < X < 5) = P ($\frac{3-2}{1.5}$ < Z < $\frac{5-2}{1.5}$) = P (0.67 < Z < 2) = 97.72 % – 74.86 % = 22.86 %

Exercice n° 06 :

Une enquête est effectuée auprès de familles de 4 personnes afin de connaitre leur achat de lait en 1 mois. Sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation de ce produit forme une population gaussienne avec une moyenne de 25 litres et un écart type de 6 litres.

En vue de concevoir une campagne de publicité, on souhaite connaître le pourcentage des faibles consommateurs (c'est-à-dire moins de 10 L/mois) et le pourcentage des grands consommateurs (c'est-à-dire plus de 30L/mois).

1. Calculer ces deux pourcentages.
2. Au-dessous de quel nombre de litres achetés se trouvent 75% des consommateurs ?
3. Combien de litres au maximum consomme la moitié des consommateurs ?
4. Au-dessus de quelle consommation se trouve 1/3 de la population ?
5. et 2/3 de la population ?

Solution :

1) Les faibles consommateurs X < 10 L et les grands consommateurs X > 30 L.
   On doit calculer les P(X < 10) et P(X > 30).
   P(X < 10) = P (Z < $\frac{10-25}{6}$ = – 2.5) = 1 – P (Z < 2.5) = 1 – 0.9938 = 0.0006
   P(X > 30) = P (Z > $\frac{30-25}{6}$ = 0.83) = 1 – P (Z < 0.83) = 1 – 0.7967 = 0.2033
2) On cherche x qui vérifie P(X < x) = 0.75

   P(X < x) = P ($\frac{X-25}{6}$ < $\frac{x-25}{6}$) = P (Z < $\frac{x-25}{6}$) = 0.75
   La table n° 1 donne : $\frac{x-25}{6}$ = 0.675 $\Rightarrow$ x = 25 + 6 $*$ 0.675 = 29.05 litres.
3) On cherche x qui vérifie P (X $\leq$ x) = 0.5
   P(X < x) = P ($\frac{X-25}{6}$ < $\frac{x-25}{6}$) = P (Z < $\frac{x-25}{6}$) = 0.5
   La table n° 1 donne : $\frac{x-25}{6}$ = 0 $\Rightarrow$ x = 25 + 6 $*$ 0 = 25 litres
4) On cherche x qui vérifie P (X > x) = 0.3333
   P(X > x) = P ($\frac{X-25}{6}$ > $\frac{x-25}{6}$) = P (Z > $\frac{x-25}{6}$) = 1 – P (Z < $\frac{x-25}{6}$) = 0.3333 $\Rightarrow$
   P (Z < $\frac{x-25}{6}$) = 0.6667 la table n°1 donne $\frac{x-25}{6}$ = 0.435 $\Rightarrow$
   x = 25 + 6 $*$ 0.435 = 27.6 litres
5) On cherche x qui vérifie P (X > x) = 0.6667
   P(X > x) = P ($\frac{X-25}{6}$ > $\frac{x-25}{6}$) = P (Z > $\frac{x-25}{6}$) = 1 – P (Z < $\frac{x-25}{6}$) = 0.6667 $\Rightarrow$
   P (Z < $\frac{x-25}{6}$) = 0.3333 puisque 0.3333 < 0.5 on cherche la valeur de $-\frac{x-25}{6}$:
   P (Z < $-\frac{x-25}{6}$) = 1 – P (Z < $\frac{x-25}{6}$) = 1 – 0.3333 = 0.6667
   La table 1 donne $-\frac{x-25}{6}$ = 0.435 $\Rightarrow$ x = 25 – 6 $*$ 0.435 = 22.4 litres.