Université de Batna

Faculté de médecine

Corrigé-type de TD10

Test de KHI-2

Exercice1 :

1ère méthode (Test d'homogénéité):

Tableau des effectifs observés :

Traitement\ Résultat	Guéri	Non guéri	Total
Radium	50	150	200
Chirurgie	54	96	150
Total	104	246	350

1. **Choix des hypothèses :**
   H_0 : Les deux traitements sont équivalents
   H_1 : Les deux traitements ne sont pas équivalents
2. **Calcul des effectifs théoriques :**

$$k = 2 \quad i = \overline{1,2}$$
$$l = 2 \quad j = \overline{1,2}$$

$$N_i = \sum_{j=1}^{2} O_{ij} \qquad N_j = \sum_{i=1}^{2} O_{ij} \qquad N = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} O_{ij}$$

$$a_j = \frac{N_j}{N} \qquad A_{ij} = N_i a_j = \frac{N_i N_j}{N}$$

Traitement \ Résultat	**Guéri**		**Non guéri**		**Total N_i**
	O_{ij}	A_{ij}	O_{ij}	A_{ij}	
Radium	**50**	**59.4**	**150**	**140,6**	**200**
Chirurgie	**54**	**44.6**	**96**	**105,4**	**150**
Total N_j	**104**		**246**		350
a_j	**0.297**		**0.703**		**1**

Condition de validité de test :

$$A_{ij} \geq 5$$

3. **La statistique de test :**

$$T_0 = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_{ij}-A_{ij})^2}{A_{ij}} = 4.94$$

4. **Le seuil critique :**

$$1-\alpha = 0.95 \qquad v = (k-1)(l-1) = 1 \qquad alors \qquad \chi^2_{1;0.95} = 3.841$$

5. **Décision :** $T_0 > \chi^2_{1;0.95}$

Décision statistique : On rejette H_0.

Décision pratique : Les deux traitements ne sont pas équivalents.

2ème méthode :

On applique un test d'homogénéité de comparaison de deux proportions :

Il s'agit d'un test bilatéral (égale conte inégale)

1) **Choix des hypothèses :**

H_0 : Les deux méthodes de traitement sont équivalentes

H_1 : Les deux méthodes de traitement ne sont pas équivalentes

$$H_0 : P_A = P_B$$
$$H_1 : P_A \neq P_B$$

2) **Calcul de la statistique de test observée :**

$$\widetilde{P_A} = {}^{50}/_{200} = 0.25 \qquad \widetilde{P_B} = {}^{54}/_{150} = 0.36$$

$$T_0 = \frac{\widetilde{P}_A - \widetilde{P}_B}{\sqrt{\widetilde{P}(1-\widetilde{P})\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)}} = -2.23$$

Telle que la proportion commune $\widetilde{P} = \frac{X+Y}{n_A+n_B}$ **=0.297**

3) Identification de seuil critique **:** le test est **valable car les conditions sont bien remplies :**

$$n_A = 200 > 30 \qquad n_A\widetilde{P}_A = 50 > 5 \qquad n_A(1-\widetilde{P_A}) = 150 > 5$$

$$n_B = 150 > 30 \qquad n_B\widetilde{P}_B = 54 > 5 \qquad n_B(1-\widetilde{P_B}) = 96 > 5$$

Alors on cherche la valeur critique dans la table 2 (table de variable normale réduite)

$$\alpha = 0.05 \qquad \overline{Z}_\alpha = \overline{Z}_{0.05} = 1.96$$

4) Décision :

$$T_0 < -\overline{Z}_\alpha$$
$$-2.23 < -1.96$$

Décision statistique : La statistique de test se trouve dans la zone de rejet de H_0 , donc on accepte H_1 .

Décision pratique : Les deux méthodes de traitements ne sont pas équivalentes.

Exercice2 :

Test d'indépendance :

Tableau des effectifs observés :

Tension \ Résultat	Echec	Succès	Total
Basse	21	104	125
Elevée	29	96	125
Total	50	200	250

1. **Choix des hypothèses :**
   H_0 : La réussite de traitement est indépendante du niveau de la tension artérielle
   H_1 : La réussite de traitement est liée au niveau de la tension artérielle.

2. **Calcul des effectifs théoriques :**

$$k = 2 \quad i = \overline{1,2}$$
$$l = 2 \quad j = \overline{1,2}$$
$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{2} O_{ij} \qquad n_{.j} = \sum_{i=1}^{2} O_{ij} \qquad N = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} O_{ij}$$
$$A_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{N}$$

Tension\ Résultat	Echec		Succès		Total $n_{i.}$
	O_{ij}	A_{ij}	O_{ij}	A_{ij}	
Basse	21	25	104	100	125
Elevée	29	25	96	100	125
Total $n_{.j}$	50		200		250

Condition de validité de test :

$$A_{ij} \geq 5$$

3. **La statistique de test :**

$$T_0 = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_{ij} - A_{ij})^2}{A_{ij}} = 1.6$$

4.

$$1 - \alpha = 0.95 \qquad v = (k-1)(l-1) = 1 \qquad alors \quad \chi^2_{1;0.95} = 3.841$$

5. **Décision :** $\boldsymbol{T_0 \leq \chi^2_{1;0.95}}$

Décision statistique : On accepteH_0.

Décision pratique : La réussite de traitement est indépendante du niveau de la tension artérielle.

<u>Exercice3 :</u>

<u>Test de conformité :</u>

1. **Choix des hypothèses :**
   H_0 : La distribution des niveaux de la phobie de l'échantillon est conforme à celle de la population (c'est-à-dire la thérapie cognitive-comportementales n'a pas d'effet sur la phobie).
   H_1 : La distribution des niveaux de la phobie de l'échantillon n'est pas conforme à celle de la population (c'est-à-dire la thérapie cognitive-comportementales a un effet sur la phobie).
2. **Calcul des effectifs théoriques :**

Niveau de la phobie	Effectifs observées $\boldsymbol{O_i}$	Probabilités théoriques $\boldsymbol{a_i}$	Effectifs Théoriques $\boldsymbol{A_i}$
Niveau 1	**120**	**0.3**	**60**
Niveau 2	**50**	**0.4**	**80**
Niveau 3	**30**	**0.3**	**60**
total	**200**	**1**	**200**

Condition de validité de test :

$$\boldsymbol{A_i \geq 5}$$

3. **La statistique de test :**

$$\boldsymbol{T_0 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(O_i - A_i)^2}{A_i} = 86.25}$$

4. **Le seuil critique :**

$$\boldsymbol{1-\alpha = 0.95 \qquad v = (k-1) = 2 \qquad alors \qquad \chi^2_{2;0.95} = 5.991}$$

5. **Décision :** $\boldsymbol{T_0 > \chi^2_{2;0.95}}$

Décision statistique : On rejette H_0

Décision pratique : La distribution des niveaux de la phobie de l'échantillon n'est pas conforme à celle de la population (c'est-à-dire la thérapie cognitive-comportementales a un effet sur la phobie).

<u>Exercice4 :</u>

Test d'indépendance :

On premier lieu, on applique un test d'indépendance de khi-deux pour discuter **la liaison** entre **l'antibiothérapie** et **l'apparition des infections post-opératoires.**

Tableau des effectifs observés :

	Antibiothérapie	Placebo	Total
Infection	10	29	39
Pas d'infection	75	27	102
Total	85	56	141

1. **Choix des hypothèses :**
   H_0 : L'antibiothérapie n'influe pas sur l'apparition d'une infection post-opératoire. (Elles sont indépendantes)
   H_1 : L'antibiothérapie influe sur l'apparition d'une infection post-opératoire (liées).

2. **Calcul des effectifs théoriques :**

$$\boldsymbol{k = 2 \quad i = \overline{1,2}}$$
$$\boldsymbol{l = 2 \quad j = \overline{1,2}}$$

$$\boldsymbol{n_{i.} = \sum_{j=1}^{2} O_{ij} \qquad n_{.j} = \sum_{i=1}^{2} O_{ij} \qquad N = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} O_{ij} \quad A_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{N}}$$

	Antibiothérapie		Placébo		Total $n_{i.}$
	$\boldsymbol{O_{ij}}$	$\boldsymbol{A_{ij}}$	$\boldsymbol{O_{ij}}$	$\boldsymbol{A_{ij}}$	
Infection	10	23.5	29	15.5	39
Pas d'infection	75	61.5	27	40.5	102
Total $n_{.j}$	85		56		141

Condition de validité de test :

$$\boldsymbol{A_{ij} \geq 5}$$

3. **La statistique de test :**

$$\boldsymbol{T_0 = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_{ij} - A_{ij})^2}{A_{ij}}} = \mathbf{26.97}$$

4. **Le seuil critique :**

$$\boldsymbol{1 - \alpha = 0.95 \qquad v = (k-1)(l-1) = 1 \qquad alors \quad \chi^2_{1;0.95} = 3.841}$$

5. **Décision :** $\boldsymbol{T_0 > \chi^2_{1;0.95}}$

Décision statistique : On rejetteH_0.

Décision pratique : L'antibiothérapie influe sur l'apparition d'une infection post-opératoire.

(Efficace dans la prévention des applications infectieuses).

En 2ème lieu :

Il s'agit d'un test unilatéral à droite (égale contre supérieure)

1) **Choix des hypothèses :**
   H_0 : L'antibiothérapie est efficace dans la prévention des applications infectieuses
   H_1 : L'antibiothérapie n'est pas efficace dans la prévention des applications infectieuses.

$$H_0 : P_A = P_B$$
$$H_1 : P_A > P_B$$

2) **Calcul de la statistique de test :**
   Proportion des non infectés en utilisant l'antibiothérapie :
   $$\widetilde{P_A} = {}^{75}/_{85} = 0.88$$
   Proportion des non infectés en utilisant le placebo :
   $$\widetilde{P_B} = \boldsymbol{{}^{27}/_{56} = 0.48}$$

$$\boldsymbol{T_0 = \frac{\widetilde{P}_A - \widetilde{P}_B}{\sqrt{\widetilde{P}(1-\widetilde{P})\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)}} = 5.198}$$

Telle que la proportion commune $\boldsymbol{\widetilde{P} = \frac{X+Y}{n_A+n_B} = 0,72}$

3) Identification de seuil critique **:** le test est **valable car les conditions sont bien remplies :**

$$\boldsymbol{n_A = 85 > 30 \qquad n_A\widetilde{P}_A = 75 > 5 \qquad n_A(1-\widetilde{P_A}) = 10 > 5}$$

$$\boldsymbol{n_B = 56 > 30 \qquad n_B\widetilde{P}_B = 27 > 5 \qquad n_B(1-\widetilde{P_B}) = 29 > 5}$$

Alors on cherche la valeur critique dans la table Normale

$$\alpha = 0.05 \qquad \overline{Z}_{2\alpha} = \overline{Z}_{0.10} = 1.645$$

4) Décision :

$$T_0 > \overline{Z}_{2\alpha}$$
$$5.198 > 1.645$$

Décision statistique : La statistique de test se trouve dans la zone de rejet de H_0 , donc on accepte H_1 .

La décision pratique : On conclure que l'antibiothérapie est plus efficace que le placebo dans la prévention des applications infectieuses.

Remarque : La solution est faite en point de vue mathématique, deux distributions « antibiothérapie » et « placebo », donc la deuxième étape est obligatoire.

Mais en point de vue médicale le placebo est sans principe actif donc on prévoit la décision sans faire un test d'homogénéité entre l'antibiothérapie et le placebo.

A RETENIR
Pour les tests unilatéraux, un test d'homogénéité de khi-deux pour la comparaison entre deux proportions observées est **non valide** .

Exercice5 :

Test de conformité :

1. **Choix des hypothèses :**
   H_0 : La distribution de l'échantillon est conforme à celle de la population (échantillon représentatif de la population).
   H_1 : L'échantillon n'est pas représentatif de la population.
2. **Calcul des effectifs théoriques :**

survie	Effectifs observées O_i	Probabilités théoriques a_i	Effectifs Théoriques A_i
$survie \leq 1$ans	12	0.3	24
1 an$<$ $survie \leq 2\ ans$	56	0.5	40
2 ans$<$ $survie \leq 5\ ans$	8	0.1	8
$survie > 5ans$	4	0.1	8
total	80	1	80

Condition de validité de test :

$$A_i \geq 5$$

3. **La statistique de test :**

$$T_0 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(O_i - A_i)^2}{A_i} = \mathbf{14.4}$$

4. **Le seuil critique :**

$$1-\alpha = 0.95 \qquad v = (k-1) = 3 \qquad alors \qquad \chi^2_{3;0.95} = 7.815$$

5. **Décision :** $T_0 > \chi^2_{3;0.95}$

Décision statistique : On rejetteH_0.

Décision pratique : L'échantillon n'est pas représentatif de la population.

Exercice6 :

Test d'homogénéité :

Tableau des effectifs observés :

	Admis	Ajournés	Total
Méthode 1	51	29	80
Méthode 2	38	12	50
Méthode 3	86	31	117
Total	175	72	247

1. **Choix des hypothèses :**

   H_0 : Les trois méthodes sont équivalentes.

   H_1 : L'une des trois méthodes est efficace que les autres.

2. **Calcul des effectifs théoriques :**

$$k = 3 \quad i = \overline{1,3}$$
$$l = 2 \quad j = \overline{1,2}$$

$$N_i = \sum_{j=1}^{2} O_{ij} \qquad N_j = \sum_{i=1}^{3} O_{ij} \qquad N = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} O_{ij}$$

$$a_j = \frac{N_j}{N} \qquad A_{ij} = N_i a_j = \frac{N_i N_j}{N}$$

	Admis		Ajournés		Total N_i
	O_{ij}	A_{ij}	O_{ij}	A_{ij}	
Méthode 1	51	57	29	23	80
Méthode 2	38	35	12	15	50
Méthode 3	86	83	31	34	117
Total N_j	175		72		247
a_j	0.71		0.29		1

Condition de validité de test :

$$A_{ij} \geq 5$$

3. **La statistique de test :**

$$T_0 = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_{ij}-A_{ij})^2}{A_{ij}} = 3.27$$

4. **Le seuil critique :**

$$1-\alpha = 0.95 \qquad v = (k-1)(l-1) = 2 \qquad alors \qquad \chi^2_{2;0.95} = 5.991$$

5. **Décision :** $T_0 \leq \chi^2_{2;0.95}$

Décision statistique : On accepte H_0.

Décision pratique : Les trois méthodes d'apprentissages peuvent être considérées comme équivalentes, c'est-à-dire malgré les différences résultats, les méthodes se valent.