Université de Batna 2

Faculté de médecine

<u>Corrigé type de TD9 (2019/2020)</u> : Test d'hypothèses

<u>Exercice 1 :</u>

$$\boldsymbol{m} = \frac{\sum x_i}{n} = 7.95 \qquad S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - m)^2}{n-1}} = 3.94968$$

Remarque : directement utiliser la touche $x\sigma_{n-1}$ dans la calculatrice pour identifier S

1) **Choix des hypothèses :**

$$H_0: m = \mu$$
$$H_1: m \neq \mu$$

Il s'agit d'un test bilatéral (égale contre inégale)

2) **Calcul de la statistique de test observée :**

$$\boldsymbol{T_0 = \frac{m-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{7.95 - 10.7}{\frac{3.94968}{\sqrt{8}}} = -1.9693}$$

3) **Identification de seuil critique :**

$$\boldsymbol{n \leq 30}$$

Loi normale

σ Inconnu

Alors on cherche le seuil critique dans la table de Student

$$\underbrace{\boldsymbol{\alpha = 0.05 \qquad ddl = n-1 = 7}}_{\bar{t}_{0.05}=2.365}$$

4) Décision :

$$\boldsymbol{-\bar{t}_\alpha \leq T_0 \leq \bar{t}_\alpha}$$
$$\boldsymbol{-2.365 \leq T_0 \leq 3.365}$$

La statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation deH_0, alors la personne est considérée comme étant en risque

<u>Exercice 2 :</u>

1) **Choix des hypothèses :**

$$H_0: \tilde{P} = P$$
$$H_1: \tilde{P} < P$$

Il s'agit d'un test unilatéral à gauche (égale contre inférieure)

2) **Calcul de la statistique de test observée :**

$$\boldsymbol{P = 0.9}$$
$$\boldsymbol{\tilde{P} = {}^{160}/_{200} = 0.8}$$

$$T_0 = \frac{\widetilde{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} = \frac{0.8 - 0.9}{\sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{200}}} = -4.714$$

3) Identification de seuil critique **:** le test est **valable car les trois conditions sont bien remplies :**

$$n > 30 \qquad nP = 180 > 5 \qquad n(1-P) = 20 > 5$$

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2 (de la variable normale réduite)

$$\alpha = 0.01 \qquad \overline{Z}_{2\alpha} = \overline{Z}_{0.02} = 2.326$$

4) Décision :

$$T_0 < -\overline{Z}_{2\alpha}$$
$$-4.714 < -2.326$$

Alors la statistique de test observée se trouve dans la zone de rejet de H_0 , donc on rejette H_0 et on accepteH_1, c'est-à-dire l'affirmation est fausse.

Exercice 3 :

La question 1 : il s'agit d'un test bilatéral (égale conte inégale)

1) Choix des hypothèses :

$$H_0: P_A = P_B$$
$$H_1: P_A \neq P_B$$

2) Calcul de la statistique de test observée :

$$\widetilde{P_A} = {}^{27}/_{50} \qquad \widetilde{P_B} = {}^{\mathbf{18}}/_{\mathbf{50}}$$

$$T_0 = \frac{\widetilde{P}_A - \widetilde{P}_B}{\sqrt{\widetilde{P}(1-\widetilde{P})\left(\frac{1}{n_A} - \frac{1}{n_B}\right)}} = 1.809068$$

Telle que la proportion commune $\widetilde{P} = \frac{X+Y}{n_A+n_B} = 0.45$

3) Identification de seuil critique **:** le test est **valable car les conditions sont bien remplies :**

$$n_A > 30 \qquad n_A\widetilde{P}_A = 27 > 5 \qquad n_A(1-\widetilde{P_A}) = 23 > 5$$

$$n_B > 30 \qquad n_B\widetilde{P}_B = 18 > 5 \qquad n_B(1-\widetilde{P_B}) = 32 > 5$$

Alors on cherche la valeur critique dans la table 2 (table de variable normale réduite)

$$\alpha = 0.05 \qquad \overline{Z}_{\alpha} = \overline{Z}_{0.05} = 1.96$$

4) Décision :

$$-\overline{Z}_{\alpha} < T_0 < \overline{Z}_{\alpha}$$
$$-1.96 < 1.8090 < 1.96$$

Alors la statistique de test se trouve dans la zone d'acceptation de H_0 , donc on accepte H_0 .

Alors on conclut qu'il n'y a pas une différence d'effet entre les deux traitements

<u>Question 2 :</u> Il s'agit d'un test unilatéral à droite (égale contre supérieure)

1) **Choix des hypothèses :**

$$H_0: P_A = P_B$$
$$H_1: P_A > P_B$$

(le traitement A **<u>est plus efficace</u>** que le traitement B)

2) **Calcul de la statistique de test :**

$$\widetilde{P_A} = {}^{27}/_{50} \qquad \widetilde{P_B} = \mathbf{{}^{18}/_{50}}$$

$$\boldsymbol{T_0 = \frac{\widetilde{P}_A - \widetilde{P}_B}{\sqrt{\widetilde{P}(1-\widetilde{P})\left(\frac{1}{n_A} - \frac{1}{n_B}\right)}} = 1.809068}$$

Telle que la proportion commune $\boldsymbol{\widetilde{P} = \frac{X+Y}{n_A+n_B} = 0.45}$

3) Identification de seuil critique **:** le test est **valable car les conditions sont bien remplies :**

$$\boldsymbol{n_A > 30 \qquad n_A\widetilde{P}_A = 27 > 5 \qquad n_A(1-\widetilde{P_A}) = 23 > 5}$$

$$\boldsymbol{n_B > 30 \qquad n_B\widetilde{P}_B = 18 > 5 \qquad n_B(1-\widetilde{P_B}) = 32 > 5}$$

Alors on cherche la valeur critique dans la table Normale

$$\boldsymbol{\alpha = 0.05 \qquad \overline{Z}_{2\alpha} = \overline{Z}_{0.10} = 1.645}$$

4) Décision :

$$\boldsymbol{T_0 > \overline{Z}_{2\alpha}}$$
$$\boldsymbol{1.809 > 1.645}$$

Alors la statistique de test se trouve dans la zone de rejet de H_0 , donc on accepte H_1 .

Alors on conclure que le traitement A **<u>est plus efficace</u>** que le traitement B.

<u>Exercice 4 :</u>

1. Il s'agit d'un test bilatéral (égale conte inégale)
   1) **Choix des hypothèses :**

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$
$$H_1: \mu_A \neq \mu_B$$

2) **Calcul de la statistique de test observée :**

$$\boldsymbol{T_0 = \frac{X_A - X_B}{\sigma\sqrt{\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{7.4 - 7.5}{0.05\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}} = -4.67}$$

3) Identification de seuil critique **:** le test est **valable car les conditions sont bien remplies :**

$\boldsymbol{n_A \leq 30}$ $\boldsymbol{n_B \leq 30}$ $\boldsymbol{\sigma_X = \sigma_Y = \sigma}$ **(Connus) et Loi Normale**

Alors on cherche le seuil critique dans la table Normale

$$\boldsymbol{\alpha = 0.01 \qquad \overline{Z}_\alpha = \overline{Z}_{0.01} = 2.576}$$

4) Décision :

$$\boldsymbol{T_0 \notin [-\overline{Z}_\alpha, \overline{Z}_\alpha]}$$
$$\boldsymbol{-4.67 < -2.576}$$

Alors la statistique de test se trouve dans la zone de rejet de H_0

Donc on conclut que les deux solutions n'ont pas un même PH

2. Il s'agit d'un test bilatéral (égale conte inégale)

1) **Choix des hypothèses :**

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$
$$H_1: \mu_A \neq \mu_B$$

2) **Calcul de la statistique de test observée :**

$$\boldsymbol{T_0 = \frac{X_A - X_B}{S_C\sqrt{\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{7.4 - 7.5}{0856\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}} = -0.27269}$$

Telle que $\boldsymbol{S_C^2 = \frac{(n_A-1)S_A^2+(n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2}}$**=0.7335**

3) Identification de seuil critique

$\boldsymbol{n_A \leq 30}$ $\boldsymbol{n_B \leq 30}$ $\boldsymbol{\sigma_X}$, $\boldsymbol{\sigma_Y}$ $\boldsymbol{in}$**Connus mais égaux et Loi Normale**

Alors on cherche le seuil critique dans la table de student

$$\underbrace{\boldsymbol{ddl = n_A + n_B - 2 = 20 \qquad\qquad \alpha = 0.01}}_{\bar{\bar{t}}_\alpha = \bar{\bar{t}}_{0.01} = 2.845}$$

4) Décision :

$$\boldsymbol{T_0} \in [-\bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{\alpha}}]$$
$$\mathbf{-2.845 < -0.272 < 2.845}$$

Alors la statistique de test se trouve dans la zone d'acceptation de H_0

Donc les deux solutions sont de mêmes PH

Exercice 5 :

Test d'homogénéité :

Il s'agit d'un test unilatéral à droite (égale contre supérieure)

1) **Choix des hypothèses :**

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

2) **Calcul de la statistique de test observée :**

$$\boldsymbol{T_0} = \frac{\boldsymbol{X_1 - X_2}}{\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{S_1^2}}{\boldsymbol{n_1}} + \frac{\boldsymbol{S_2^2}}{\boldsymbol{n_2}}\right)}} = \frac{\mathbf{68.2 - 67.5}}{\sqrt{\frac{\mathbf{3.6^2}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{2.8^2}}{\mathbf{50}}}} = \mathbf{1.0891}$$

3) Identification de seuil critique **:**

$\boldsymbol{n_1 > 30}$ $\boldsymbol{n_2 > 30}$ $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ **Inconnues, on les remplace successivement par** $\boldsymbol{S_1^2}$ $\boldsymbol{S_1^2}$

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2 (Normale réduite)

$$\boldsymbol{\alpha = 0.05} \qquad \overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{2\alpha}} = \overline{\boldsymbol{Z}}_{\mathbf{0.1}} = \mathbf{1.645}$$

4) Décision :

$$\boldsymbol{T_0} < \overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{2\alpha}}$$
$$\mathbf{1.089 < 1.645}$$

Alors la statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation de H_0.

Donc il n'y a pas de différence entre les poids moyens.

Exercice 6 :

$$\boldsymbol{m} = \frac{\sum x_i}{n} = 0.37875$$

1) **Choix des hypothèses :**

$$H_0: m = \mu$$
$$H_1: m > \mu$$

Il s’agit d’un test unilatéral à droite (égale contre supérieure)

2) Calcul de la statistique de test observée :

$$\boldsymbol{T_0 = \frac{m-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0.378-0.4}{\frac{0.2}{\sqrt{16}}} = -0.425}$$

3) Identification de seuil critique :

$$\boldsymbol{n \leq 30}$$

Loi normale

$\boldsymbol{\sigma}$ connu

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2(Normale réduite)

$$\boldsymbol{\alpha = 0.05 \qquad \overline{Z}_{2\alpha} = 1.645}$$

4) Décision :

$$\boldsymbol{-\overline{Z}_{\alpha} \leq T_0 \leq \overline{Z}_{\alpha}}$$
$$\boldsymbol{-1.645 \leq T_0 \leq 1.645}$$

La statistique de test se trouve dans la zone d’acceptation deH_0, alors les sportifs testés ne sont pas dopés.

<u>Exercice7 :</u> Pour l’échantillon donné :

$\boldsymbol{m} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{155}{100} = 1.55 \qquad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i)^2}{n} - m^2$=0.0775

Pour identifier la variance de l’échantillon S^2, on utilise la relation : $S^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2$=$\frac{100}{99}\boldsymbol{0.0775} =$ 0.07828

1) Choix des hypothèses :

$$H_0: m = \mu$$
$$H_1: m \neq \mu$$

Il s’agit d’un test bilatéral (égale contre inégale)

2) Calcul de la statistique de test observée :

$$\boldsymbol{T_0 = \frac{m-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{1.55-1.5}{\frac{0.2797}{\sqrt{100}}} = 1.7876}$$

3) Identification de seuil critique :

$$\boldsymbol{n > 30}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ Inconnu

Alors on cherche le seuil critique dans la table 2 (Normale réduite)

$$\boldsymbol{\alpha = 0.05 \qquad \overline{Z}_{\alpha} = 1.96}$$

4) Décision :

$$-\overline{Z}_{\alpha} \leq T_0 \leq \overline{Z}_{\alpha}$$
$$-1.96 \leq T_0 \leq 1.96$$

La statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation deH_0, alors la production respecte l'indication mentionnée.

Exercice 8 :

1. On doit réaliser un test unilatéral à gauche (plus tardivement)

1) Choix des hypothèses :

$$H_0: \tilde{P} = P$$
$$H_1: \tilde{P} < P$$

(Égale contre inférieure)

2) Calcul de la statistique de test observée :

$$P = 0.5$$
$$\tilde{P} = {}^{35}/_{80} = 0.4375$$

$$T_0 = \frac{\tilde{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} = \frac{0.4375 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{80}}} = -1.118$$

3) Identification de seuil critique **:** le test est **valable car les trois conditions sont bien remplies :**

$$n > 30 \qquad nP = 40 > 5 \qquad n(1-P) = 40 > 5$$

Alors on cherche le seuil critique dans la table Normale

$$\alpha = 0.05 \qquad \overline{Z}_{2\alpha} = \overline{Z}_{0.10} = 1.645$$

4) Décision :

$$T_0 > -\overline{Z}_{2\alpha}$$
$$-1.118 > -1.645$$

Alors la statistique de test observée se trouve dans la zone d'acceptation de H_0 , donc on rejetteH_1,

C'est -à-dire les bébés prématurés ne marchent pas plus tardivement que les bébés normaux.

Exercice 9 :

Cas des échantillons appariés :

A RETENIR :

Des échantillons appariés sont des échantillons construits de façon à ce qu'ils soient composés d'individus possédant les mêmes caractéristiques. C'est le cas par exemple lorsque l'on mesure le même caractère sur les mêmes individus à deux moments différents (avant-après)

Patient	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Différence	0.95	-0.15	1.03	0.43	0.62	0.59	0.49	-0.08	0.01

Différence= avant-après

$$\overline{\boldsymbol{D}} = \frac{\sum D_i}{n} = 0.43222 \qquad S_D = \sqrt{\frac{\sum (D_i - \overline{D})^2}{n-1}} = 0.42845$$

Remarque : directement utiliser la touche $x\sigma_{n-1}$ dans la calculatrice pour identifier S_D

1) **Choix des hypothèses :**

$$H_0 : \mu = 0$$
$$H_1 : \mu > 0$$

Il s'agit d'un test unilatéral à droite (égale contre supérieure)
(car on discute ici la diminution de l'indice, c'est-à-dire l'indice avant supérieur à l'indice après)

2) **Calcul de la statistique de test observée :**

$$\boldsymbol{T_0 = \frac{\overline{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} = 3.0239}$$

3) **Identification de seuil critique :**
On cherche le seuil critique dans la table de Student

$$\underbrace{\boldsymbol{\alpha = 0.05 \qquad ddl = n - 1 = 8}}_{\bar{t}_{2\alpha}=\bar{t}_{0.1}=1.86}$$

4) Décision :

$$\boldsymbol{T_0 > \bar{t}_{2\alpha}}$$
$$\boldsymbol{T_0 > 1.86}$$

La statistique de test observée se trouve dans la zone de rejet de H_0, alors on accepte H_1 (l'indice avant supérieur à l'indice après , c'est-à-dire l'indice diminue)

Donc le traitement est efficace.