Année universitaire
2020-2021

Cours de Bio-statistiques

Enseignant: Abdallah
Benaissa

Séance

7

Notions de probabilités.

Introduction

Considérons le jeu suivant. on met dans une boite 20 boules de même forme, mais de couleurs différentes, 8 blanches et 12 noires.

On se pose la question suivante. Si on tire de la boite une boule au hasard, laquelle des deux couleurs (blanche ou noire) a plus de chances de sortir ?

Intuitivement et en suivant " le bon sens "

la réponse dépendra du rapport entre le nombre des blanches et celui des noires.

a- si le nombre des blanches est plus grand que celui des noires, la couleur blanche a plus de chance de sortir.
b- si le nombre des blanches est plus petit que celui des noires, la couleur noire a plus de chance de sortir.
c- si le nombre des blanches est égal à celui des noires, la couleur blanche a les mêmes chances de sortir que la couleur noire.

Dans d’autres expériences, l’intuition ne suffit pas de choisir une réponse évidente. Alors, en se basant sur le bon sens, on construit des modèles mathématiques qui nous permettent de donner une réponse logique.

C’est le cas dans certains jeux de hasard. Au début du dix septième siècle le problème de choisir des issues favorables (ayant plus de chances de sortir) dans les jeux de hasard a posé problème aux notables d’Europe qui participaient à ces jeux. Ces notables avaient alors sollicité l’aide des mathématiciens de l’époque pour les aider à prévoir les issues les plus favorables dans ces jeux. On estime que c’est l’origine de la théorie mathématique des probabilités. Plusieurs éminents mathématiciens avaient alors participé à asseoir les fondements de la théorie, comme Pascal, Fermat, Laplace,..., La formulation axiomatique de la théorie des probabilités à permis l'utilisation d'outils mathématiques puissants, comme la théorie des ensembles et la théorie de la mesure. La théorie de probabilité est devenue aujourd'hui un outil incontournable dans toutes les sciences: économie, physique, biomédical, ...

Exemple

Un dé est un cube, sur chacun de ses 6 faces est inscrit un numéro, de 1 à 6. On considère l'expérience suivante. On jette un dé bien équilibré, et on note le numéro sur la face d'en haut. l'ensemble des résultats possibles est l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Cet ensemble s'appelle l'espace fondamental, ou l'univers, lié à cette expérience. Chaque partie de l'ensemble Ω s'appelle événement, par exemple l'ensemble $\{1,4,6\}$ est un événement. L'événement Ω composé de tous les résultats possibles est appelé l'événement certain.

Un événement composé d'un seul résultat possible est appelé événement élémentaire, par exemple $\{1\}$ est un événement élémentaire.

Intuitivement, on peut dire que chaque numéro des 6 a les mêmes chances d'apparaitre. Le nombre total des numéros étant égal à 6, chaque numéro a une chance sur 6 d'apparaitre. Selon la même logique, on peut dire que les chances d'apparaître d'un évènement sont estimées par le rapport entre le nombre des résultats possibles qui le compose et le nombre 6 des résultats possibles. On estime donc les chances d'apparaitre d'un évènement lié à l'expérience par un nombre positif compris entre 0 et 1.

A partir de tel raisonnement basé sur le bon sens, les mathématiciens ont progressivement construit les fondements mathématiques de la théorie des probabilités jusqu'à l'aboutissement au modèle final.

Définitions

Considérons une certaine expérience (pour se fixer les idées, vous pouvez faire la liaison avec l'expérience du dé décrite ci-dessous).

Ensemble fondamental, événement.

L'ensemble fondamental lié à une certaine expérience est l'ensemble formé de tous les résultats possibles de l'expérience. On le note généralement Ω.

Dans l'expérience du dé, on a

$$\boxed{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}}$$

On appelle événement toute partie de l'ensemble fondamental Ω. Dans l'expérience du dé $A = \{3,4,5\}$ est un événement. L'ensemble des événements est donc l'ensemble des parties de Ω, noté $P(\Omega)$.

Un événement élémentaire est un événement, formé d'un seul élément de l'ensemble fondamental Ω, dans l'expérience du dé, $\{3\}$ est un événement élémentaire.

L'événement formé de tous les éléments de l'ensemble fondamental Ω (c'est-à-dire, Ω lui même), s'appelle l'événement sûr, ou l'évènement certain.

L'ensemble vide $\emptyset$, c'est-à-dire ne contenant aucun élément de Ω s'appelle l'événement impossible.

Opérations sur les événements.

Puisque les événements sont des parties d'un ensemble, toutes les opérations sur les ensembles (union, intersection, complémentaire,...) sont valables pour les événements, et toutes les propriétés de ces opérations sur les ensembles sont valables pour ces opérations sur les événements.

Négation d’un événement.

La négation d’un événement A, noté $\overline{A}$ (on lit A barre) ou CA (on lit complémentaire de A), est l’événement formé des résultats possibles qui ne sont pas dans A.

Donc, en langage ensembliste,

$\overline{A}$ est le complémentaire de A.

Intersection de deux événements.

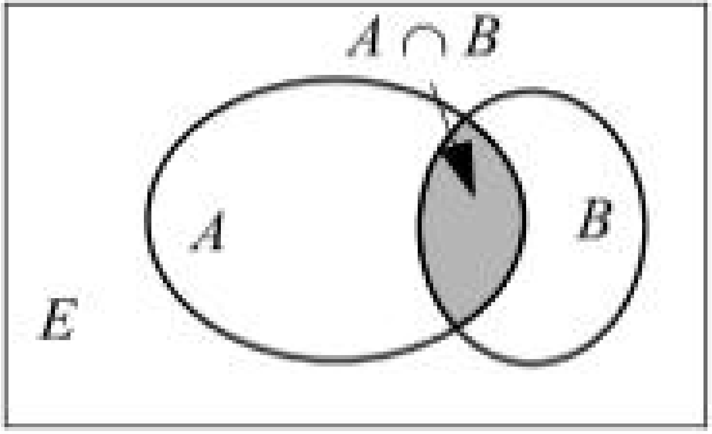
L’intersection de deux événements A et B, est l’événement noté $A \cap B$ (on lit A inter B), formé des résultats possibles qui sont à la fois dans A et dans B.

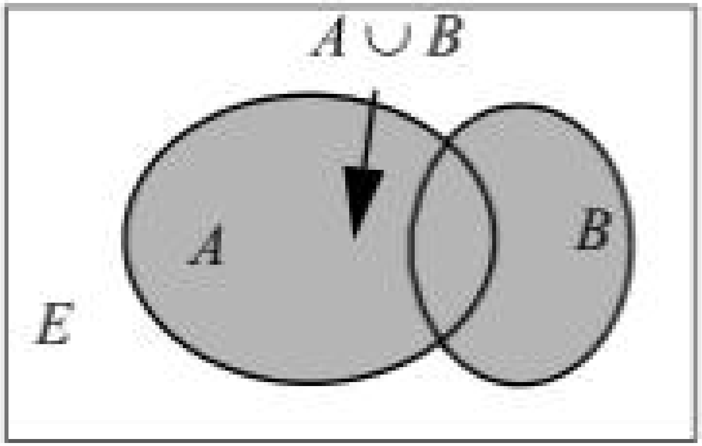
Union de deux événements.

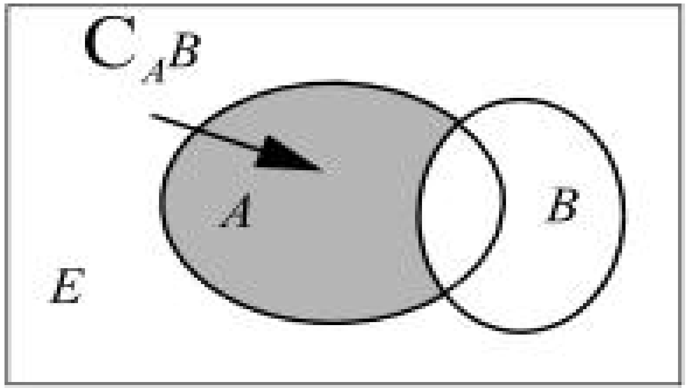
L'union de deux événements A et B est l'événement $A \cup B$ (on lit A union B), formé des résultats possibles qui sont, soit dans A et non dans B, soit dans B et non dans A, soit à la fois dans A et dans B.

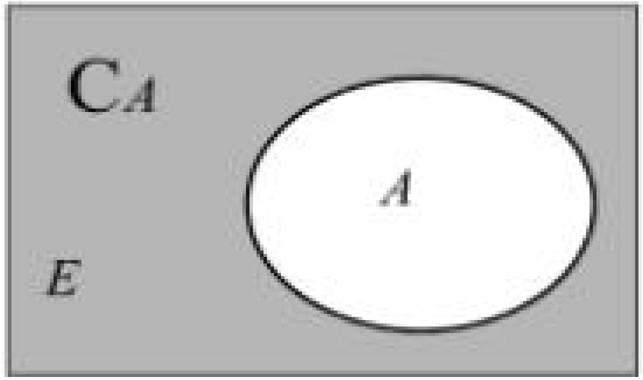
Différence entre deux événements.

La différence entre deux événements A et B est l'événement $A - B$ ou $C_A B$ (on lit différence entre A et B, ou complémentaire de B dans A), formé des résultats possibles qui sont dans A, mais ne sont pas dans B, Les opérations sur des évènements sont représentées par les diagrammes suivants, appelés Diagrammes de Venn.









Ici, l’espace fondamental est noté E

Exemple.

Considérons l'expérience du jet du dé décrite précédemment.

L'évènement $A = \{4, 5\}$ correspond à la face 4 ou la face 5. La réalisation de l'évènement A veut dire "après le jet du dé, la face du dé obtenue est l'une des deux faces, 4 ou 5".

L'évènement $B = \{2, 4, 3\}$ correspond à l'une des trois faces, 2, 4 ou 3. La réalisation de l'évènement B veut dire "après le jet du dé, la face du dé obtenue est l'une des trois faces, 2, 4 ou 3".

La négation de l'évènement A est l'évènement

$$\boxed{\overline{A} = \{1, 2, 3, 6\}}$$

La réalisation de l'évènement $\overline{A}$ signifie la non réalisation de l'évènement A. Dans cet exemple la réalisation de $\overline{A}$, signifie que la face du dé obtenue porte l'un des numéros $1, 2, 3, 6$.

L'union des évènements A et B
est l'évènement

$$\boxed{A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}}$$

La réalisation de l'évènement $A \cup B$ signifie la réalisation de l'un des deux évènements A ou B au moins.

Dans cet exemple la réalisation de $A \cup B$, signifie que la face du dé obtenue porte l'un des numéros $2, 3, 4, 5$.

L'intersection des évènements A et B est l'évènement

$$\boxed{A \cap B = \{4\}}$$

La réalisation de l'évènement $A \cap B$ signifie la réalisation des deux évènements A ou B en même temps. Dans cet exemple la réalisation de $A \cap B$ signifie que la face obtenue porte le numéro 4.

Probabilité sur un ensemble.

Dans l'expérience du dé, si on associe à chaque événement le nombre positif compris entre 0 et 1, égal au rapport du nombre des résultats possibles composant cet événement et le nombre 6 égal au nombre total de tous les résultats possibles de l'expérience, on dit qu'on a défini une probabilité sur l'ensemble fondamental Ω.

Cette procédure est un cas particulier qui ne couvre pas toutes les situations importantes dans lesquelles s'impliquent les probabilités. On pense donc qu'il est plus judicieux de présenter la théorie en utilisant l'approche axiomatique.

Ensemble probabilisable.

Soit Ω un ensemble non vide (contenant au moins un élément), et soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$ $(\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega))$.

A- On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de $\mathcal{P}(\Omega)$ si, $\mathcal{A}$ est stable

par les deux opérations ensemblistes, l'union et le complémentaire. C'est-à-dire, si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1- $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

2- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow CA \in \mathcal{A}$.

B- On dit que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre ou tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$ si la condition 1- dans **A**- est remplacée par la condition plus forte suivante, de la stabilité par union dénombrable:

1'- Si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i=1}^{i=\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$, formé d'un ensemble Ω et une tribu $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de l'ensemble Ω, s'appelle ensemble **probabilisable**.

Exemple 1.

1)- L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de tous les parties d'un ensemble non vide Ω est une tribu de lui-même.

2)- Soient $\Omega = \{a, b, c\}$, l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties de Ω défini par $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{c\}, \emptyset, \Omega\}$, est une tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple 2.

Dans l'expérience du dé l'espace fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. l'ensemble des évènements est l'ensemble $P(\Omega)$ des parties de Ω.

Calculer le nombre d'évènements dans l'expérience du dé!

Solution.

Le nombre d'évènements dans l'expérience du dé est égale à

$$\boxed{\begin{array}{c} C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 \\ \hline = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = \mathbf{64} \end{array}}$$

Ensemble probabilisé.

Définition

On appelle une probabilité **P** sur un ensemble probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$,

une application qui associe à chaque élément A de $\mathcal{A}$, un nombre **P**(A) compris entre 0 et 1, et qui vérifie les propriétés suivantes.

a- **P**$(\Omega) = 1$

b- Si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, c'est-à-dire telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour tous $m \neq n$, alors on a

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \ldots) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_1) + \ldots.$$

Dans ce cas, on appelle le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un **ensemble probabilisé**.

Propriétés d'une probabilité.

1- Si $A_1, \ldots, A_n$ est une suite finie de n événements disjoints deux à deux, alors on a

1)- $\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n).$

2)- $\mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{0}.$

3)- $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{1} - \mathbf{P}(\mathbf{CA})..$

4)- $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$

5)- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

5 Bis- La propriété 5- peut se généraliser à l'union d'un nombre fini quelconque d'évènements. Dans le cas de l'union de trois évènements on a

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C) \\ - [\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap C) + \mathbf{P}(B \cap C)]\end{aligned}}$$

incompatibilité-Indépendance

Deux évènements A et B sont dits incompatibles si

$$\boxed{A \cap B = \emptyset}$$

Deux évènements A et B sont dits indépendants si

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Exemple 1: Ensembles finis.

Si $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ est un ensemble fini composé de N éléments $(N \geq 1)$. On définit une probabilité **P** sur l'ensemble probabilisé $(\Omega, \mathrm{P}(\Omega))$ de la façon suivante.

On associe à chaque événement élémentaire a_i de l'ensemble Ω un nombre p_i compris entre 0 et $1,$ tels que

$$\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1.}$$

Et, on associe à chaque événement (c'est-à-dire à chaque partie de l'ensemble Ω) la somme des probabilités des événements élémentaires le composant.

Exemple 2: Ensemble équiprobable.

Si dans la définition précédente,

$$\boxed{p_1 = p_2 = \ldots = p_N = \frac{1}{N},}$$

on dit que l'ensemble probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est équiprobable.

Dans le cas d'ensembles équiprobables la probabilité d'un évènement A est donnée par la formule

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}},}$$

où le nombre de cas favorables est le nombres des éléments de l'événement A (c'est-à-dire le nombre des événements élémentaires la composant) et le nombre de cas possibles est égal au nombre total des éléments de l'espace fondamental Ω
(c'est- à- dire le nombre de tous
les événements élémentaires).
C'est surtout dans le cas d'ensembles équiprobables qu'on utilise les techniques d'analyse combinatoire.

Exemple 3.

On considère l'expérience du jet de la pièce de monnaie trois fois de suite. Un résultat possible de cette expérience est éxprimé par une suite de 3 lettres, chaque lettre est P ou F, selon le résultat obtenu. Par exemple, si le premier jet donne pile, le second donne face et le troisième donne pile, le résultat de l'expérience est PFP. L'ensemble fondamental est

$$\boxed{\Omega = \{PPP,\ PPF,\ PFP,\ PFF,\ FPP,\ FPF,\ FFP,\ FFF\}}$$

Le nombre d'éléments de l'ensemble Ω est $N = 8$.

. Posons

$$\mathbf{P}(PPP) = \mathbf{P}(PPF) = \mathbf{P}(PFP) = \mathbf{P}(PFF) =$$

$$= \mathbf{P}(FPP) = \mathbf{P}(FPF) = \mathbf{P}(FFP) = \mathbf{P}(FFF) = \tfrac{1}{8}.$$

On définit ainsi un ensemble équiprobable.
Cela est en accord avec le bon sens, parce que après les trois jets de la pièce de monnaie, tous les résultats possibles ont les mêmes chances de sortir. Considérons les événements

A : aucun jet des trois ne donne pile,

B : au moins l'un des trois jets donne pile,

C : Il y a exactement un pile dans les trois jets,

D : le premier jet donne pile,

E : le deuxième jet donne face.

On a

$$\boxed{A = \{FFF\},}$$

$$\boxed{B = \{PPP,\ PPF,\ PFP,\ PFF,\ FPP,\ FPF,\ FFP\},}$$

$$\boxed{C = \{PFF, FPF, FFP\}.}$$

$$\boxed{D = \{PPP, PPF, PFP, PFF\}}$$

$$\boxed{E = \{PFP, PFF, FFP, FFF\},}$$

d'où

$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{8}$,
$\mathbf{P}(B) = \frac{7}{8}$,
$\mathbf{P}(C) = \frac{3}{8}$,
$A \cup B = \Omega$,
$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Puisque

$$\boxed{A \cap B = \emptyset,}$$

alors les événements A et B sont incompatibles. On a

$$\boxed{D \cap E = \{PFP, PFF\},}$$

d'où

$$\boxed{\mathbf{P}(D \cap E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},}$$

et

$$\boxed{\mathbf{P}(D \cap E) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbf{P}(D) \times \mathbf{P}(E).}$$

Donc, les événements D et E sont indépendants.

Exemple 2.

On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé.

Le dé a 6 faces numérotés de 1 à 6 et la pièce de monnaie en a 2, pile et face. Déterminer l'ensemble fondamental Ω dans les cas suivants, et définir une probabilité adéquate.

a- On s'intéresse à la fois, au résultat de la pièce de monnaie (pile ou face) et au résultat du dé (un numéro des six).

b- on s'intéresse uniquement au résultat de la pièce de monnaie.

c- on s'intéresse uniquement au résultat du dé.

Solution.

a- On a deux résultats possibles pour la pièce de monnaie et chaque résultat de la pièce de monnaie lui correspond 6 résultats du dé.

et chaque résultat de la pièce de monnaie lui correspond 6 résultats du dé.

Donc, on a au total 2×6 résultats possibles qui sont

$$\Omega = \{(p,1),(p,2),(p,3),(p,4),(p,5),(p,6),$$
$$(f,1),(f,2),(f,3),(f,4),(f,5),(f,6)\}.$$

Et, chacun de ces douze résultats a une chance sur douze de sortir. Donc, on définit une probabilité équiprobable, où la probabilité de l'évènement élémentaire est égale à

$$\boxed{\frac{1}{12}}$$

b- $\Omega = \{p, f\}$. est composé de deux éléments p et f.

On définit une probabilité équiprobable $\mathbf{P}$, en posant

$$\boxed{\mathbf{P}(f) = \mathbf{P}(p) = \frac{1}{2}}$$

Exemple 5.

Dans le cas fini, il est plus convenable de travailler sur des ensembles équiprobables. Car, on peut dans cette situation utiliser les techniques d'analyse combinatoire.

Soit l'exemple suivant.

On a 7 enveloppes fermées, contenant chacune un bout de papier sur lequel est inscrit un nombre.

Ces nombres sont répartis comme suit.

Une enveloppe contient le nombre 0, deux enveloppes contiennent chacune le nombre 10, deux enveloppes contiennent chacune le nombre 20 et deux enveloppes contiennent chacune le nombre 30.
On prend 2 enveloppes au hasard, et on mentionne la somme des deux nombres dans les deux enveloppes.
- Quelle est la probabilité que la somme des deux nombres est égale à 0?
- Quelle est la probabilité que la somme est égale à 50?
- Quelle est la probabilité que la somme est égale à 10?
- Quelle est la probabilité que la somme soit au moins égale à 50?

Solution.

On a 7 enveloppes, qu'on imagine numérotées de 1 à 7. Un résultat possible de cette expérience est une combinaison de deux enveloppes (donc de deux numéros) parmi les 7. L'ensemble fondamental Ω est l'ensemble de toutes les combinaisons de deux numéros parmi les 7 numéros, Ω contient

$$\boxed{C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21}$$

éléments. Chaque combinaison de deux numéros a les mêmes chances d'être tirée.

Il s'agit donc d'un espace équiprobable, où la probabilité d'un évènement élémentaire est égale à

$$\boxed{\frac{1}{21},}$$

et la probabilité d'un évènement quelconque est le rapport du nombre des combinaisons qui la composent et le nombre 21. On note par 1 l'enveloppe contenant 0, par 2 une enveloppe contenant 10, par 3 la deuxième enveloppe contenant 10, par 4 une enveloppe contenant 20, par 5 la deuxième enveloppe contenant 20, par 6 une enveloppe contenant le nombre 30 et enfin par 7 la dernière enveloppe qui va forcément contenir le nombre 30.

L'opération de prendre deux enveloppes parmi les 7 signifie le prise d'une combinaison de deux numéros parmi les 7.

- Aucune combinaison ne donne zéro, donc notre évènement ne contient aucun élément de Ω, c'est l'ensemble vide,

$\boxed{\text{(La probabilité que la somme soit zéro)} = \mathbf{P}(\emptyset) = 0}$

- Les éléments de Ω qui correspondonnent à l'événement " la somme est 50" sont $(4,6)$, $(4,7)$, $(5,6)$, $(5,7)$. Leur nombre est 4. Donc,

$\boxed{\text{La probabilité que "la somme est 50" est } \frac{4}{21}}$

- Les éléments de Ω qui correspondent à l'évènement "la somme est 10" sont $(1,2)$, $(1,3)$. Leur nombre est 2. Donc,

$\boxed{\text{La probabilité que "la somme est 10" est } \frac{2}{21}}$

La probabilité que "la somme est 60" est $\frac{1}{21}$

- Ici la somme doit être égale à 50 ou égale à 60.

Les éléments de cet évènement sont $(4,6)$, $(4,7)$, $(5,6)$, $(5,7)$, $(6,7)$. Leur nombre est 5. Donc

La probabilité que "la somme est au moins 5" est $\frac{5}{21}$

Remarque

Dans cet exemple, pour rendre les calculs plus simples, on a considéré un espace équiprobable. Mais aprés avoir fait les calculs on peut considérer uniquement la somme des deux nombres dans les deux enveloppes choisies au hasard. Dans ce cas, on obtient un espace fini (**mais non équiprobable**), représenté par le tableau à deux lignes suivant, où dans la première ligne sont représentés les évènements élémentaires et dans la deuxième ligne les probabilités correspondantes:

Ev_i	10	20	30	40	50	60	total
$\mathbf{P}(Ev_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	1

Exemple 6.

On met dans une boite 20 boules de même forme, mais de couleurs différentes: 5 blanches, 8 noires et 7 jaunes.

A. Tirage sans remise.

On tire une première boule on constate sa couleur et on la met de coté, on tire ensuite une deuxième boule on constate sa couleur et on la met de coté, on tire enfin une troisième boule et on constate sa couleur.

a- Quelle est la probabilité que la première boule soit Jaune?

b- Quelle la probabilité que la première boule et aussi la deuxième soient jaunes.

c- Quelle est la probabilité que les trois boules soient de même couleur?

B. Tirage avec remise.

On refait la même expérience, mais cette fois on remet chaque boule tirée dans la boite aprés avoir constaté sa couleur, et on fait ensuite le tirage suivant.

On répond aux mêmes questions a-,b- et c- considérées dans **A**.

Solution.

A.

a- Les tirages deux et trois n'interviennent pas. Le nombre de cas possibles est égal à 20. On a 7 boules jaunes, le nombre de cas favorables est égal à 7. La probabilité que le premier tirage donne une boule jaune est égale

$$\boxed{\frac{7}{20}}$$

b- On considère les deux premiers tirages à la fois. Chaque résultat possible est un arrangement de deux boules parmi les 20, le nombre de cas possible est égal à

$$A_{20}^{2} = 20 \times 19 = 380.$$

b- On considère les deux premiers tirages à la fois. Chaque résultat possible est un arrangement de deux boules parmi les 20, le nombre de cas possible est égal à

$$A_{20}^{2} = 20 \times 19 = 380.$$

Chaque résultat favorable correspond à un arrangement de deux boules parmi les 7 boules jaunes, le nombre de cas favorables est donc égal à

$$A_{7}^{2} = 7 \times 6 = 42.$$

La probabilité est donc égale à

$$\boxed{\frac{A_{7}^{2}}{A_{20}^{2}} = \frac{42}{380} = \frac{21}{190}}$$

c- Le nombre de cas possibles est égal à A_{20}^3. Pour avoir trois boules de même couleur, il faut que les 3 boules soient toutes de couleur blanche, de couleur noire ou de couleur jaune.

Donc le nombre de cas favorables est égal à la somme des cas favorables correspondants à chacune des trois couleurs, donc égal à

$$A_5^3 + A_8^3 + A_7^3.$$

La probabilité est donc égale à

$$\boxed{\frac{A_5^3 + A_8^3 + A_7^3}{A_{20}^3} = \frac{606}{6840}.}$$

B.

Puisque avant le tirage suivant, on remet dans la boite la boule tirée, la même boule peut apparaitre dans deux tirages ou même, dans les trois tirages. On a dans ce cas affaire à des arrangements avec répétition. Les probabilités en questions seront égales à

a- $\dfrac{7}{20}$,

b- $\dfrac{R_7^2}{R_{20}^2} = \dfrac{7^2}{20^2}$,

c- $\dfrac{R_5^3 + R_8^3 + R_7^3}{R_{20}^3} = \dfrac{5^3 + 8^3 + 7^3}{20^3}$.

Exemple 7.

Dans certaines situations, on ne connait pas l'ensemble fondamental. Dans de telles situations, les méthodes d'analyse combinatoire n'interviennent pas et on utilise uniquement les définitions et les données spécifiques au problème considéré.

1- Soit A et B deux événements liés à une même expérience tels que

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{5},\ P(B) = \frac{1}{3},\ P(A \cap B) = \frac{2}{15}.}$$

Calculer les probabilités des évènements

$E =$ au moins l'un de ces événements se produit, et

$F =$ un seul et un seul de ces deux événements se produit.

Solution a)-

$$\boxed{E = A \cup B,}$$

d'où

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{6}{15}. \end{aligned}$$

b- l'événement F correspond à la situation suivante:

"la réalisation de A et la non réalisation de B" ou

"la réalisation de B et la non réalisation de A".

Cela signifie en langage d'ensembles

$$\boxed{F = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).}$$

Puisque $(A \cap \bar{B})$ et $(\bar{A} \cap B)$ sont disjoints, on a

$$\boxed{P(F) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)}$$

D'autre part on a

$$\boxed{A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)}$$

et

$$\boxed{B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B),}$$

où la réunion est disjointe dans les deux cas.

On en déduit les relations suivantes

$$\boxed{P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B),}$$

$$\boxed{P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B).}$$

D’où

$$\boxed{\begin{aligned} P(F) &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 2\frac{2}{15} \\ &= \frac{4}{15}. \end{aligned}}$$

Illustration des ensembles $(A \cap \bar{B})$ et $(\bar{A} \cap B)$. par le diagramme de Venn.