Troisième partie

Analyse combinatoire et probabilités

Chapitre 5

Analyse combinatoire

le terme "Analyse combinatoire", désigne par convention, les techniques de dénombrer des ensembles finis, c'est-à-dire les techniques pour calculer le nombre des éléments de ces ensembles. En probabilités les ensembles à dénombrer sont souvent déterminés par une certaine expérience aléatoire (c'est-à-dire dont le résultat ne peut pas être déterminé d'avance).

5.1 Arrangements et permutatations

5.1.1 Arrangements.

Arrangement (sans répétition).

Définition On appelle arrangement de r éléments d'un ensemble E, à n éléments ($r \leq n$) l'opération suivante :

choisir dans l'ordre r éléments parmi les n éléments de l'ensemble E. Cela est possible parce que $r \leq n$.

Question.

Combien y a-t-il d'arrangements de r éléments d'un ensemble à n éléments ?

Réponse.

On procède comme suit.

1- On choisit un premier élément de l'ensemble E : on a n façons de le faire.

2- Il reste $n-1$ éléments, on en choisit un deuxième élément : on a $n-1$ façons de le faire.

.
.
.

r- Il reste $(n-r+1)$ éléments, on en choisit un $r^{ème}$ élément : on a $(n-r+1)$ de le faire.

En résumé on a réalisé r expériences, la première a r résultats possibles, la deuxième a $r-1$ résultats possibles,..., la $r^{ème}$ a $(n-r+1)$ résultats possibles.

Ainsi, le nombre d'arrangements de r éléments d'un ensemble à n éléments $(r \leq n)$, noté A_n^r est donné par la formule

$$A_n^r = n \times (n-1) \times ... \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{5.1}$$

Exemple. 15 chevaux ont participé à une course. Quels est le nombre de quartés dans l'ordre possibles ?

Un quarté dans l'ordre est l'ensemble des 4 numéros ayant gagné la course, placés dans l'ordre selon le résultat de la course.

La première place sera gagnée par 1 cheval parmi les 15 participants, il y a 15 résultats possibles.

Pour chaque résultat de la première place, la deuxième place sera gagnée par 1 cheval parmi les 14 chevaux restants, il y a 14 résultats possibles.

Pour chaque résultat des deux premières places, la troisième place sera gagnée par un cheval parmi les 13 qui restent, il y a 13 résultats possibles.

Enfin, pour chaque resultats des trois premieres places, la quatrième et dernière place sera gagnée par un cheval parmi les 12 restants.

Ainsi, le nombre total des quartés dans l'ordre, dans une course de 15 chevaux est égal à

$$A_{15}^4 = 15 \times 14 \times 13 \times 12 = \frac{15!}{(15-4)!} = 32760.$$

5.1.2 Arrangement avec répétition.

Définition. Un arrangement avec répétition de r éléments d'un ensemble *à* n éléments est l'opération de choisir dans l'ordre, r éléments parmi les n éléments de l'ensemble E, où un élément peut être choisi plus d'une fois. Ici

r peut être plus grand que n. parce que un même élément peut être choisi plusieurs fois, et c'est là la différence avec l'arrangement (sans répétition).

Question.

Quel est le nombre d'arrangements avec répétition, de r éléments d'un ensemble à n éléments.

Réponse.

On choisit un élément parmi les n éléments pour la première place, on a n façons de le faire.

On choisit ensuite un élément pour la deuxième place, toujours parmi les n éléments, parce que l'élément choisi pour la première place peut aussi être choisi pour la deuxième place, on a aussi n façons de le faire.

On répète cette opération r fois et chaque fois on aura n façons possibles de le faire. Ainsi, le nombre d'arrangements avec répétition de r éléments d'un ensemble à n éléments, noté R_n^r, est donné par la formule

$$R_n^r = n^r \tag{5.2}$$

Exemple. Un groupe de 10 élèves sont en compétition pour avoir la meilleure note dans chacune des quatre matières : mathématiques, physique, arabe, français.

on élimine les cas où deux élèves ou plus auront la même note dans la même matière.

Ici un élève peut avoir la meilleure note en une, en deux, en trois, ou dans les quatre matières.

Quel est le nombre de situations possibles ?

La meilleure note en mathématiques sera acquise par l'un des 10 étudiants, on a 10 possibilités.

La meilleure note en physique sera acquise aussi par l'un des mêmes 10 étudiants, y compris celui qui aura la meilleure note en mathématiques, on a donc aussi 10 possibilités.

Le même nombre de possibilités pour l'arabe et aussi le français.

Ainsi le nombre total de résultats possible est égal à

$$R_{10}^4 = 10^4$$

5.1.3 Permutation.

Une permutation d'un ensemble E à n éléments est un arrangement des n éléments de l'ensemble E.

Donc la permutation est un arrangement particulier et ainsi, on calcule le nombre de permutations d'un ensemble ayant n éléments par la même formule. Ainsi, le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est égal à

$$n\,(n-1)\times ...\times 1 = n! \tag{5.3}$$

Exemple. Dix candidats ont participé à un concours et ils attendent l'annonce du résultat du concours, où les 10 étudiants seront classés de 1 à 10. Quel est le nombre de résultats possibles du concours.

Le nombre de résultats possibles est 10 !

5.2 Combinaisons.

5.2.1 Combinaison (sans répétition)

Définition.

Une combinaison de p éléments d'un ensemble E à n éléments $(p \leq n)$ est un sous ensemble contenant p éléments, de l'ensemble E à n éléments.

On désigne par C_n^p le nombre des combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments.

Exemple.

Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

$A = \{a, d, e\}$ est une combinaison de 3 éléments de l'ensemble E à 7 éléments.

$\{a\}$ est une combinaison de 1 élément de l'ensemble E.

L'ensemble vide $\emptyset$ est une combinaison de zéro élément de l'ensemble E.

E est une combinaison de n éléments de l'ensemble E.

5.2.2 Combinaisons et arrangements.

On montrera ici comment calculer le nombre de combinaisons à partir du nombre d' arrangements, déjà donné par la formule (5.1) . On expliquera çà dans le cas particulier $(p = 3, n = 7)$.

Dans l'exemple précédent les deux représentations $\{a, d, e\}$ et $\{d, a, e\}$ représentent la même combinaison, parce qu' elles sont formées des mêmes éléments. Mais, elles représentent deux arrangements différents, parce que, bien qu'elles soient formées des mêmes éléments, ces éléments ne sont pas dans le même ordre.

Les arrangements formées des mêmes éléments a, d, e de E sont :
$\{a, d, e\}, \{a, e, d\}, \{e, d, a\}, \{e, a, d\}, \{d, a, e\}\ \{d, e, a\}$
Ils sont en nombre de 6.

On a construit ces 6 arrangements en considérant tous les positions possibles des trois éléments a, d, e. C'est-à-dire en considérant toutes les permutations de l'ensemble de ces trois éléments. Ainsi, le nombres d'arrangements formés de ces mêmes trois éléments a, d, e est égal au nombre des permutations d'un ensemble à 3 éléments, c'est-dire $3! = 6$. Donc le nombre A_7^3 des arrangements de 3 éléments d'un ensemble à 7 éléments est donné par la formule $A_7^3 = 3!C_7^3$.

Puisque la valeur de A_7^3 a déjà été calculée, on en déduit le nombre C_7^3 des combinaisons de 3 éléments d'un ensemble à 7 éléments, par la formule suivante.

$$C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{2 \times 3} = 35$$

Dans le cas général, ce raisonnement donne la formule

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \tag{5.4}$$

Exemple

Dans un championnat de football, il y a 20 équipes, où pendant la saison chaque deux équipes doivent se rencontrer.

Quelle est le nombre total de matchs dans les deux cas suivants.

1)- Chaque deux équipes s'affrontent une fois.

2)- chaque deux équipes font deux matchs : un match "aller" et un match "retour".

Solution 1)- Chaque deux équipes des 20 équipes font un match, donc le nombre de matchs est égal au nombre de combinaisons

$$C_{20}^{2} = \frac{20}{18!2!} = 190 \text{ matchs.}$$

2)– Dans cette situation, pour programmer un match on choisit les deux équipes qui vont s'affronter et ensuite on les ordonne en commençant par exemple par l'équipe qui reçoit, la programmation d'un match correspond donc au choix d'un arrangement de deux des vingt équipes : le nombre de matchs est égal au nombre d'arrangements

$$A_{20}^{2} = 20 \times 19 = 380 \text{ matchs.}$$

5.2.3 Combinaison avec répétition.

Définition

On appelle combinaison avec répétition de p éléments d'un ensemble E à n éléments une liste de p éléments de l'ensemble E, où un élément peut apparaitre plus qu'une fois sur cette liste, et où l'ordre d'écriture des p éléments n'est pas pris en considération.

Par exemple $\{1,1,2,2\}$ et $\{1,2,2,1\}$ représente la même combinaison avec répétition de 4 éléments de l'ensemble E des 10 numéros de 1 à 10 .

Par contre, ils représentent deux arrangements avec répétitions différents de 4 éléments de l'ensemble E des dix numéros de 1 à 10.

Remarque importante. Pour former des combinaison avec répétition de p éléments d'un ensemble à n éléments, il n'est pas nécessaire que p ne soit pas plus grand que n, par exemple $\{1,1,1,1,2\}$ est une combinaison avec répétition de 5 éléments de l'ensemble $\{1,2\}$ à deux éléments.

5.2.4 Formule.

On accepte sans démonstration le résultat suivant. le nombre des combinaisons avec répétitions de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté K_{n}^{p}, est donné par la formule

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}. \tag{5.5}$$

Exemple. Une association a l'intention de distribuer vingt lits médicaux à cinq centres médicaux. De combien de façons peut-elle répartir ces vingt lits sur les cinq centres médicaux.

Réponse.

Le nombre de façons possibles est égal à

$$K_5^{20} = C_{24}^{20} = \frac{24!}{19!4!} = 212520 \text{ façons}$$

Combinaison - combinaison avec répétition

Une combinaison est déterminée par les éléments qui la composent, mais une combinaison avec répétition est déterminée par "les éléments qui la composent et le nombre de répétition de chacun de ces éléments".

5.2.5 Permutation avec répétition.

Au lieu de donner directement la définition de la Permutation avec répétition, avec ses notations encombrantes, il vaut mieux l'introduire par des exemples.

Exemple 1.

Dans le cadre d'une décoration, on a 8 pots de même forme mais de couleurs différentes : 3 rouges 4 bleus et 1 jaune. On place ces pots côte à côte sur une étagère. Quel est le nombre de dispositions possibles ?

Solution. Supposons qu'on place ces pots de droite à gauche. On peut par

exemple commencer par les pots rouges, en les plaçant côte à côte, ils vont occuper les places 1,2,3, on place ensuite les 4 pots bleus, ils occuperont les places 4,5,6,7, on met enfin le pot jaune après les 7 pots déjà placés, il occupera la dernière place, c'est-à-dire la $8^{ème}$, il y a une seule façon de le placer.

On va maintenant construire un raisonnement logique qui nous permettra de trouver le nombre total de façons à placer ces 8 pots côte à côte (sans faire de distinction entre les pots de même couleur).

De droite à gauche il y a 8 positions.

On commence par choisir 3 positions parmi ces 8 positions pour les 3 pots rouges, pratiquement çà veut dire choisir 3 numéros parmi les 8, ça revient à choisir une combinaison de 3 numéros parmi les 8 numéros : on a C_8^3 façons de le faire.

Après avoir choisi les positions des pots rouges, on choisit 4 positions pour les pots bleus, ça veut dire choisir 4 numéros parmi les 5 numéros qui restent, ça revient à choisir une combinaison de 4 numéros parmi les cinq qui restent, on a C_5^4 façons de le faire.

Enfin, on attribue le numéro qui reste au pot jaune, on a une seule façon de le faire, c'est-à-dire $1 = C_1^1$.

Le nombre total de façons de placer ces pots côte à côte est égal à

$$C_8^3 \times C_5^4 \times C_1^1 = \frac{8!}{3!4!1!}.$$

Ce raisonnement est valable dans le cas général, qu'on va exposer tout de suite.

Définition

Soit r ensembles $E_1, E_2, ...E_r$ ayant respectivement $n_1, n_2, ..., n_r$ éléments. On considère l'ensemble E réunion de ces r ensembles : $E = E_1 \cup ... \cup E_r$. les ensembles $E_1, E_2, ...E_r$ sont des parties de L'ensemble E et le nombre n des éléments de E est $n = n_1 + n_2 + ... + n_r$.

L'emplacement des n éléments de l'ensemble E côte à côte, sans faire de distinction entre les éléments d'une même partie E_i s'appelle une permutation avec répétition de l'ensemble E à n éléments, relativement à la partition $(E_1, n_1), ... (E_r, n_r)$. Le nombre de ces permutations avec répétitions est noté $P_{n,n_1,n_2,...,n_r}$.

En calquant le raisonnement fait dans l'exemple précédent, on trouve la formule

$$P_{n,n_1,n_2,...,n_r} = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-(n_1+n_2)}^{n_2} ... C_{n_r}^{n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!} \tag{5.6}$$

Exemple 2. Tahar veut préparer à son fils un programme de révision pour l'examen de sixième. La durée de révision est de 7 jours (de vendredi à jeudi), il veut les répartir sur les trois matières comme suit : 3 jours pour le calcul, 3 jours pour l'arabe et un jour pour le français.

1)- De combien de façons peut-il répartir les 7 jours de la semaine sur les trois matières ?

2)- On suppose que, l'arabe est composée de trois parties A_1, A_2, A_3, le calcul est également composé de trois parties C_1, C_2, C_2 et le français est composé d'une seule partie F.

Tahar a pensé qu'il vaut mieux, fixer à chaque partie des trois matières un jour de révision. De combien de façon peut-il programmer, dans ce cas, la révision de son fils ?

Solution

1)- Il choisit 3 jours de la semaine pour l'arabe. Parmi les 4 jours qui restent, il en choisi 3 pour le calcul, et le jour qui reste sera forcément attribué au français : le nombre de façons est égal au nombre $P_{7,3,3,1}$ de permutations avec répétitions donné par la formule

$$P_{7,3,3,1} = \frac{7!}{3!3!1!} = 140 \text{ façons.}$$

2)- Dans ce cas, chaque partie (des 7 parties) sera attribuée à un jour de la semaine, le nombre de façons est égal au nombre de permutations

$$P_8 = 7!. = 5040 \text{ façons}$$