Statistiques descriptives et inférentielles

Abdallah Benaissa [1]

14 Avril 2020

[1]Professeur en mathématiques, chargé du module de biostatistiques à la faculté de médecine de l'université de Batna - Algérie

Table des matières

Preface

Ce polycopié est adressé aux étudiants de la première année en médecine. Il est conçu selon le nouveau programme officielle élaboré en Juin 2017.

Première partie

Rappels mathématiques.

Chapitre 1

Théorie des ensembles.

1.1 Ensemble, Elément.

1.1.1 Définitions

On appelle ensemble, toute liste où collection d'objets bien définis, explicitement où implicitement ; on appelle éléments ou membres de l'ensemble, les objets appartenant à l'ensemble et on note :

- $p \in A$ si p est un élément de l'ensemble A.
- $B \subset A$ ou $A \supset B$, si $x \in B \Rightarrow x \in A$.
- Si $B \subset A$, on dit que B est une partie de A, ou que B est un sous ensemble de A.

On définit un ensemble, soit en listant ses éléments : $A = \{1, 2, 3\}$, soit en donnant la définition de ses éléments : $X = \{x : x \text{ est un entier pair}\}$.

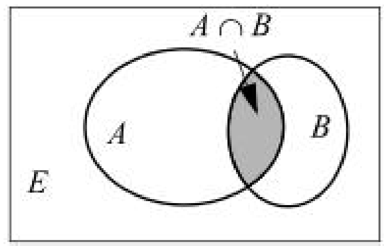
1.1.2 Notation

- la négation de $x \in A$ est $x \notin A$.
- $\emptyset$ est l'ensemble vide.
- E est l'ensemble universel.

1.1.3 Opération sur les ensembles

Soient A et B deux ensembles quelconques.

Intersection



L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments x tels que $x \in A$ et $x \in B$,

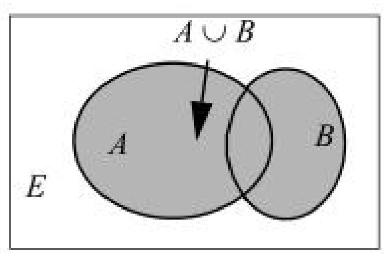
soit :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Le terme « et » est employé au sens, $x \in A$ et B, si x appartient à la fois à A et à B.

Cas particulier. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints, on dit aussi en language probabiliste incompatible

Reunion



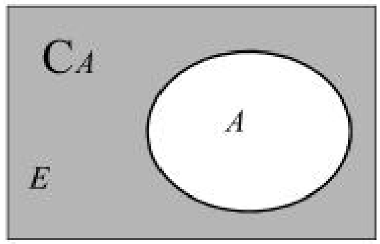
La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments x tels que

$x \in A$ ou $x \in B$, soit:

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

le terme « ou » est employé au sens, $x \in A$ ou $x \in B$, si x appartient à A (uniquement), ou x appartient à B (uniquement), ou à la fois à A et à B.

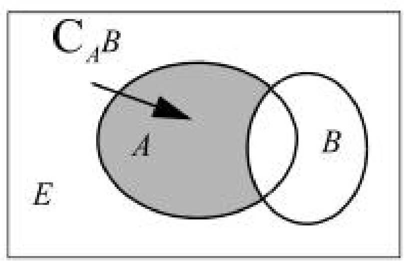
Complémentaire



Le complémentaire de A, noté CA ou $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$CA = \{x : x \notin A\}$$

Différence



La différence entre A et B, ou complémentaire de B relatif à A, noté $A - B$, ou C_A^B , est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B :

$$A - B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

1.1.4 Propriétés des opérations sur les ensembles

Loi idempotente

$$A \cup A = A; \qquad A \cap A = A$$

Loi associative

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,; \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Loi commutative

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A$$

Loi de distributivité

$$(A \cup B) \cap C = \quad (A \cap C) \cup (B \cap C)\,; \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Loi d'identité

$$A \cup \emptyset = A; \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup E = E; \qquad A \cap E = A$$

Loi de complémentarité

$$A \cup C \;\; A = E; \qquad A \cap C \;\; A = \emptyset$$
$$C \;\; C \;\; A = A; \qquad C \;\; E = \emptyset; \qquad C \;\; \emptyset = E$$

Loi de De Morgan

$$C \;\; (A \cup B) = C \;\; A \cap C \;\; B; \qquad C \;\; (A \cap B) = C \;\; A \cup C \;\; B$$

1.2 Ensembles particuliers

1.2.1 Ensemble fini

Un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il contient un nombre fini d'éléments, sinon il est infini.

Exemple. L'ensemble E des cinq lettres a, b, c, d, e est fini

Exemple. l'ensemble des habitants de l'algérie est un ensemble fini (même s'il est relativement grand plus de trente millions).

1.2.2 Ensemble dénombrable

– Un ensemble est dénombrable s'il existe une bijection entre une partie de l'ensemble des entiers naturel $\mathbb{N}$ et cet ensemble . On a trois genre d'ensemble dénombrable :

a- L'ensemble vide $\emptyset$ est dénombrable par convention.

b- Un ensemble fini A, s'écrit évidemment sous la forme $\{a_1, a_2, ...a_n\}$, n étant un élément de $\mathbb{N}$.

c- Un ensemble dénombrable non fini A est un ensemble qui s'écrit sous la forme $\{a_1, a_2, ...\}$.

L'ensemble des entiers naturels N est évidemment un ensemble dénombrable non fini.

1.2.3 Ensemble infini non dénombrable.

Un ensemble A est non dénombrable s'il n'existe pas de bijection entre une partie de $\mathbb{N}$ et cet ensemble. Intuitivement çà signifie qu'il est plus grand que $\mathbb{N}$.

Exemple. Les ensembles infinis non dénombrales qu'on rencontrera dans notre contexte sont surtout, les intervalles de $\mathbb{R}$.

1.2.4 Ensembles produits

L'ensemble produit de deux ensembles A et B est l'ensemble noté $A \times B$ formé des couples ordonnés (a, b) où a est un élément de A et b est un élément de B :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Exemple 1. Si $A = \{1, 2, d\}$ et $B = \{a, d\}$, alors

$$A \times B = \{(1, a), (1, d), (2, a), (2, d), (d, a), (d, d)\}.$$

Exemple 2. Si $A = B = \mathbb{R}$, alors

$$A \times B = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

1.2.5 Famille d'ensembles

Il peut arriver qu'on considère un ensemble dont les éléments sont eux mêmes des ensembles. Un tel ensemble est appelé une famille d'ensembles. On réprésente généralement une famille d'ensembles en fixant un ensemble I appelé ensemble d'indices et on associe à chaque indice $i \in I$, un élément de la famille qu'on note A_i, la famille d'ensembles est alors représentée par $A_i, i \in I$. Parties d'un ensemble

Soit A un ensemble quelconque. On note l'ensemble des parties de l'ensemble A, par $P(A)$.

Exemple 1. Si $A = \{a, b, d\}$ alors

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$$

Union et intersection infinies

Soient $A_i, i \in I$ une famille infinie d'ensembles.

a- Union L'union des éléments de la famille $A_i, i \in I$, noté $\underset{i \in I}{\cup} A_i$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent au moins à un certain A_i :

$$\underset{i \in I}{\cup} A_i = \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

Si l'ensemble des indices est une partie $I = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels on utilise aussi la notation $\overset{\infty}{\underset{i=k}{\cup}} A_i$ ou $\underset{i \geq k}{\cup} A_i$.

Exemple 1. Soient pour tout entier naturel n, l'intervalle $A_n = [0, n[$. On a $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n = \mathbb{R}$.

Exemple 2. Soient pour tout entier naturel $k \geq 1$, l'intervalle $B_k = \left[\frac{1}{k}, k\right[$. on peut vérifier que $\underset{K \geq 1}{\cup} B_k = \mathbb{R}^* =]0, +\infty[$.

b- Intersection l'intersection des éléments de la famille $A_i, i \in I$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tout élément A_i de la famille d'ensembles en question.

Exemples. Reprenons les ensembles $A_n = [0, n[$ et $B_k = \left[\frac{1}{k}, k\right[$, considérés précédemment.

a- $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} A_n = [0, 1[$, car $A_1 = [0, 1[$ est contenu dans tous les autres ensembles $A_n, n > 1$.

b- $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, car $B_1 = [1, 1[= \emptyset$.

1.3 Partition d'un ensemble

Une partition d'un ensemble A est une subdivision de l'ensemble A. Rigoureusement parlant, une partition de A est une famille de parties de A telle que l'union des éléments de cette famille est égale à A, et l'intersection de deux élements (quelconques) différents de cette famille est égale à l'ensemble vide.

Exemple 1. Soient $A = \{a, b, c, 4\}$, $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{a, b\}$, $A_3 = \{c, 4\}$, $A_4 = \{b, c\}$, $A_5 = \{4\}$.

A_1, A_2, A_4 est une famille de parties de A, qui ne forme pas une partition de A, car $A_1 \cap A_2 = \{a\} \neq \emptyset$.

A_2, A_5 est une famille de parties de A, qui n'est pas une partition de A, car $A_2 \cup A_3 = \{a, b, 4\} \neq A$.

A_2, A_3 est une partition de A.

Exemple 2. Soient A l'ensemble des êtres humains, A_1 l'ensemble des êtres humains de sexe masculin, A_2 l'ensemble des êtres humains de sexe féminin.

La famille A_1, A_2 est une partition de A.

Chapitre 2

Sommation de nombres et de fonctions.

2.1 Le symbole $\sum$.

2.1.1 Cas fini

Si $a_1, a_2, ..., a_n$ est une suite finie de nombres, on désigne la somme $a_1 + a_2 + ... + a_n$ par $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n. \tag{2.1}$$

Exemple 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2^i} &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{2}} \text{ (somme des cinq premiers termes d'une suite géométrique)} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5
\end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^1 + 2^2 + ...2^n.$$

2.1.2 Cas infini

Si $a_1, a_2, ...$ est une suite infinie de nombres, on designe par $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ la limite de la suite $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Exemple .

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} &= \lim_n \left[\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} \right] \\
&= \lim_n \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \text{ (somme des } n \text{ premiers termes d'une suite géométrique)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2.2 Le symbole $\int$.

2.2.1 Cas de fonction à valeurs positives.

Soit $f(x)$ une fonction à valeurs réelles non négatives $(f(x) \geq 0)$ définie sur un intervalle $[a, b]$. On désigne par $\int_a^b f(x)\,dx$, l'air sous le graphe de la fonction $f(x)$ entre les droites $x = a$ et $x = b$.

2.2.2 Exemple

$\int_1^3 (2x+1)\,dx$ est l'air d'un trapèze. Cette aire est égale à $\int_1^3 (2x+1)\,dx = \left(\frac{7+3}{2} \times 2\right) = 10$

2.2.3 Cas de fonction à valeurs non positives.

Si $f(x) \leq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx$ designe l'air au dessus du graphe de la fonction $f(x)$, située entre les deux droites $y = a$ et $y = b$, avec le signe $-$.

2.2.4 Exemple

$\int_1^3 (-2x-1)\,dx$ est l'air du même trapèze avec le signe $-$. on a donc

$$\int_1^3 (-2x-1)\,dx = -10.$$

2.2.5 Cas général.

Si $f(x)$ a des valeurs positives et aussi des valeurs négatives sur l'intervalle $[a,b]$, on divise l'intervalle $[a,b]$ en n sous intervalles $[a,a_2[\,,[a_2,a_3[\,,...\,[a_n,b[$ de sorte que le signe de la fonction $f(x)$ est, soit $\leq$ ou $\geq$ sur chaque sous intervalle de la subdivision. L'intégrale de $f(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$ est la somme des integrales de $f(x)$ sur chaque sous intervalle de la subdivision.

2.2.6 Exemple

Soit la fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[-2,7]$ comme suit

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{2};\ \text{pour } -2 \leq x < 2 \\ -x,\ \text{pour } 2 \leq x < 4 \\ x+b,\ \text{pour } 4 \leq x \leq 7 \end{array} \right\}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{7} f(x)dx &= \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{7} f(x)dx \\ &= -\frac{2}{2} + \frac{3\times 1}{2} - \frac{2\times 1}{2} + \frac{2\times 2}{2} = 1,5 \end{aligned}$$

2.2.7 Intégrale sur un intervalle non borné.

Soit une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Si la suite $S_n = \int_a^n f(x)\,dx$, $n > a$, converge vers une limite $S \in R$, On appelle cette limite l'intégrale indéfinie de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$ et on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_n \int_a^n f(x)\,dx. \qquad (2.2)$$

On définie de la même façon les intégrales indéfinies

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{n} \int_{-n}^{+\infty} f(x)\,dx, (n \in \mathbb{N}, \quad -n < b) \tag{2.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n} \int_{-n}^{0} f(x)\,dx + \lim_{n} \int_{0}^{n} f(x)\,dx, (n \in \mathbb{N}, n \geq 1\ ) \tag{2.4}$$

2.2.8 Exemple

Considérons la fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ comme suit.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^1}, \text{ pour } & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2^2}, \text{ pour } & 2 \leq x < 3, \\ & ... \\ \frac{1}{2^n}, \text{ pour } n \leq x < n+1. \end{cases}$$

$f(x)$ est constante sur tout intervalle $[n, n+1[$, $n = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{n} \int_{1}^{n} f(x)\,dx \\ &= \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} \\ &= \lim_{n} \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2.3 Primitive d'une fonction.

Soit une fonction $f(x)$ définie un intervalle $I = [a, b]$, ($a < b$, l'un où les deux pouvant être infinis), ou définie sur l'union d'intervalles.

On dit qu'une fonction $F(x)$, définie sur le même ensemble, est une primitive de la fonction $f(x)$, si la dérivée $F^{'}(x)$ de la fonction F au point $x \in I$, est égale à $f(x)$, valeur de f au point x.

2.3.1 Notation

Si une fonction $F(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)$, on écrit

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

2.3.2 Remarque

Faites attention ! Il faut bien distinguer entre l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ et l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$. L'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre lié à l'intervalle $[a, b]$. l'intégrale indéfinie est une fonction qui à tout nombre $x \in [a, b]$ associe un nombre noté usuellement par $\int f(x)dx$.

2.3.3 Exemples.

1-

$$f(x) = x^2 + 1,$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x$$

est une primitive de $f(x)$. Et, en général si C est un nombre quelconque la fonction $\frac{x^3}{3} + x + C$ est une primitive de la même fonction

$$f(x) = x^2 + 1.$$

2- Si n est un entier différent de -1, alors

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

3-

$$\int \sin x dx = \cos x + C.$$

4- Si $a \neq 0$,

$$\int \exp(ax)dx = \frac{1}{a} \exp(ax) + C.$$

2.3.4 Propriétés des primitives

1- En ajoutant un nombre quelconque à une primitive d'une fonction, on obtient une autre primitive de la même fonction : Si $F(x) = \int f(x)dx$ et C est un nombre, alors $F(x) + C = \int f(x)dx$.

2- Linéarité :

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))\, dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx, \text{ et} \\ \int \lambda f(x)dx &= \lambda \int f(x)dx \text{ (pour tout nombre } \lambda) \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3.5 Primitive et calcul d'intégrales

a- Si elle existe, alors la fonction $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est une primitive de la fonction $f(x)$.

Ici x est fixé, c'est la borne supérieure de l'intervalle $]-\infty, x[$ sur laquelle on calcule l'intégrale, t est une lettre muette, elle n'a pas de sens toute seule.

b- Si une fonction $F(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)$, alors on la formule suivante pour calculer l'intégrale définie de $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{2.6}$$

Notation Dans les calculs, on exprime la quantité $F(b)-F(a)$ par $[F(x)]_a^b$.

2.3.6 Exemples

1-

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(x^2 + 1\right) dx &= \left[x^3 + x\right]_0^2 = \left(2^2 + 2\right) - \left(0^3 + 0\right) \\ &= 6 - 0 = 6. \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &= [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 \\ &= 0 - 1 = -1.\end{aligned}$$

3-

$$\begin{aligned}\int_1^5 Exp(-2x)dx &= \left[-\frac{1}{2}Exp(-2x)\right]_1^5 \\ &= \left(-\frac{1}{2}Exp(-2\times 5)\right) - \left(-\frac{1}{2}Exp(-2\times 1)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{-10} - e^{-2}\right).\end{aligned}$$

Remarque La formule (2.6) est valable même dans le cas où l'une ou les deux bornes a et b sont infinies, par exemple

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\, dx &= F(+\infty) - F(a). \qquad (2.7)\\ &= \left(\lim_n F(n)\right) - F(a).\end{aligned}$$

2.3.7 propriétés de l'intégrale.

soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions à valeurs réelles, λ un nombre réel.

Linéarité a- $\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$

b- $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$

Exemple 1. $\int_{-1}^1 (-x^3 + 2x^2 - x^5)\, dx = -\int_{-1}^1 x^3 dx + 2\int_{-1}^1 x^2 dx - \int_{-1}^1 x^5 dx =$

$= -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{+1} + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} - \left[\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{+1} =$

$= -\left(\frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) + 2\left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - \left(\frac{1^6}{6} - \frac{(-1)^6}{6}\right) =$

$= -(0) + 2\left(\frac{2}{3}\right) - (0) = \frac{4}{3}.$

Exemple 2. $\int_{-\pi}^{\pi}(-2\cos x + e^{-x} - x^2)\,dx = -2\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}dx - \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx =$
$= -2\left[-\sin x\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-e^{-x}\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi} =$
$= -2\left\{(-\sin\pi) - (-\sin(-\pi)\right\} + \left\{(-e^{\pi}) - (-e^{-\pi})\right\} - \left\{\frac{1}{3}\pi^3 - \frac{1}{3}(-\pi)^3\right\} =$
$= -e^{\pi} + e^{-\pi} - \frac{2}{3}\pi^3.$

Relation de Chasles. Si c est un nombre quelconque et $f(x)$ est définie sur les trois intervalles $[a,c]$, $[c,b]$ et $[a,b]$, alors on a la relation suivante dite relation de chales.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2.8}$$

Deuxième partie

Statistiques descriptives

La statistique est la science dont l'objet est de recueillir, de traiter et d'analyser des données issues de l'observation de phénomènes aléatoires, c'est-à-dire dans lesquels le hasard intervient. Une étude statistique passe généralement par trois étapes.

1)- Elle commence par l'identification du phénomène ou problème à étudier, par exemple pour étudier le problème du diabète en Algérie, on doit évaluer le taux de la glycémie, l'effet de ce fléau sur le fonctionnement du corps humain, la relation entre ce fléau et le rendement économique,...

2)- La deuxième étape concerne la collecte des données, généralement, sur un échantillon représentatif de la population à étudier. La collecte des données se fait, soit par des questionnaires (par exemple, le nombre d'enfants de familles, le niveau d'instruction,...), soit par des manipulations (la mesure de la glycémie, la mesure de la tension artérielle,...) .

3)- La troisième étape concerne l'analyse et l'interprétation des résultats. L'analyse des données est utilisée pour décrire les phénomènes étudiés, faire des prévisions et prendre des décisions à leur sujet.

Les trois démarches qu'on vient de décrire concernent les statistiques descriptives. Il est important de noter que les statistiques descriptives utilisées il y a quelques siècles, se sont beaucoup développées aujourd'hui en donnant naissance à ce qu'on appelle les statistiques inférentielles.

En effet, on peut répartir la théorie des statistiques en deux grandes classes de statistiques, la deuxième étant un prolongement de la première :

Statistique descriptive, a pour but de recuillir les données et les résumer de façon synthétique et efficace. Elle utilise pour cela des représentations de données sous forme de graphiques, de tableaux et d'indicateurs numériques (par exemple des moyennes). Elle permet de dégager les caractéristiques essentielles du phénomène étudié et de suggérer des hypothèses pour une étude ultérieure plus sophistiquée.

Statistique inférentielle Le rôle de la statistique inférencielle est de fournir des outils mathématiques basés sur la théorie des probabilités, servant à généraliser les propriétés et les caractéristiques calculées sur l'échantillon à la population toute entière.

La statistique descriptive est dite univariée ou " à une dimension ", lorsqu'il s'agit de l'étude d'un seul caractère, sinon elle est dite multidimensionnelle.

Chapitre 3

Statistique unidimensionnelle

3.1 Définition

3.1.1 Population, unité et caractère statistiques.

Une population statistique est un ensemble d'êtres dont on s'intéresse à un de ses caractères, par exempe la population de la ville de Batna, l'ensemble des tremblements de terre en Algérie durant le $20^{ème}$ siècle.

L'unité statistique est un élément quelconque de la population statistique, par exemple l'unité statistique dans le cas de la population statistique des habitants de la ville de Batna est un habitant de Batna.

Le caractère statistique est la propriété des unités statistiques à étudier, par exemple la couleur des yeux, la taille pour la population des habitants de Batna. Le caractère statistique peut avoir plusieurs modalités (ou valeurs).

Le caractère étudié est quantitatif si ses modalités (ou ses valeurs possibles) sont mesurables, c'est-à-dire exprimées par des valeurs numériques, et il est qualitatif si ses modalités ne sont pas mesurables. Un caractère quantitatif est discret si ses modalités sont en nombre fini (ou dénombrables) et il est continu si ses valeurs possibles forment un ou plusieurs intervalles. Un caractère statistique qualitatif est ordinal si ses modalités peuvent être ordonnées (par exemple le stade d'une maladie), sinon il est nominal.

3.1.2 Recencement - Echantillonage

Pour étudier un caractère d'une population statistique, on ne peut pas en général, relever la valeur (ou la modalité) de ce caractère sur chaque individu de cette population. Alors, on considère une partie de taille raisonnable de cette population. Cette partie, sélectionnée à priori, s'appelle échantillon de la population et elle doit être représentative de la population. Les techniques utilisées pour assurer cette représentativité s'appellent "théorie de l'échantillonage".

Mais, parfois on doit considérer tous les éléments de la population statistique, on dit dans ce cas qu'il s'agit d'un recencement, par exemple le recencement de la population de l'Algerie qui se fait tous les dix ans (nombre d'habitants, repartition selon le sexe, selon les tranches d'âges, selon le niveau d'instruction...)

3.1.3 Série statistique simple

Une série statistique simple est une suite de nombres représentant les mesures d'un caractère quantitatif prises sur un échantillon d'une population statistique

3.2 Natures des variables statistiques et échelles de mesures.

Les données qualitatives définissent des échelles soit nominales soit ordinales. L'échelle nominale comporte un certain nombre de catégories, dont la seule propriété est qu'elles sont toutes différentes les unes des autres (sexe, nationalité, type de diplôme, etc.). Dans le cas d'une échelle ordinale, en revanche, les catégories qui la composent sont munies d'une structure d'ordre, établie en fonction d'un critère donné (de moins à plus "quelque chose" : origine sociale, opinion plus ou moins favorable, stade de développement d'une maladie,...).

Les données quantitatives se réfèrent à des variables d'intervalle ou de rapport. Dans le premier cas, on dispose d'échelles au sein desquelles la comparaison d'intervalles est possible (il est possible de déterminer si deux intervalles sont ou ne sont pas de même étendue). Dans le deuxième cas, l'échelle permet non seulement la comparaison d'intervalles, mais également la comparaison de rapports (il est possible de déterminer si deux rapports sont ou ne sont pas égaux). La différence fondamentale entre ces deux types d'échelles est liée au statut de la valeur nulle : sur une échelle d'intervalle, le zéro est situé de manière arbitraire, comme pour la mesure des températures par exemple (échelles Celsius et Fahrenheit). Sur une échelle de rapport, en revanche, le zéro a une signification précise, puisqu'il désigne l'absence du caractère considéré (âge, salaire, taille, vitesse, etc.).

3.2.1 Exemples.

Caractère quantitatif discret

On s'intéresse au nombre de modules obtenus par chaque étudiant de la premère année universitaire écoulée de la faculté de médecine. La population statistique est l'ensemble des étudiants de la première année de la faculté de médecine, un étudiant de la première année est une unité statistique, le caractère statistique étudié est le nombre de modules obtenus, c'est un caractère quantitatif discret.

Caractère quantitatif continu

Si au lieu du nombre de modules obtenus, on s'intérèsse à la taille de chaque étudiant, alors le caractère statistique "la taille" est un caractère quantitatif continu.

Caractère qualitatif nominal

Si au lieu du nombre de modules obtenus, on s'intérèsse à la couleur des yeux de chaque étudiant, alors le caractère statistique "couleur des yeux" est un caractère qualitatif nominal.

Caractère qualitatif ordinal

Si on considère le stade de la maladie (niveau de gravité de la maladie) chez un ensemble de cancéreux, alors on a affaire à un caractère statistique ordinal.

3.2.2 Echelles de mesures : Recapitulation par des exemples

Variables qualitatives nominales, **échelle nominale,** exemples : le nom des journaux, le métier ou le nom**.**

Variables qualitatives ordinales, **échelle ordinale,** exemples **:** le rang, stade d'une maladie.

Variables quantitatives discrètes, **échelle de rapport,** exemples : nombre d'enfants, nombre d'habitants.

Variables quantitatives discrètes, **échelle d'intervalle,** exemples **:** date de naissance, heure d'arrivée

Variables quantitatives continues, **échelle de rapport,** exemples : distance, durée.

Variables quantitatives continues, **échelle d'intervalle,** exemple : température.

3.3 La variabilité et l'incertain en biologie

3.3.1 Variabilité biologique et variabilité métrologique

La statistique constitue, en médecine, l'outil permettant de répondre à de nombreuses questions qui se posent en permanence au médecin :

Quelle est la valeur normale d'une grandeur biologique, taille, poids, glycémie ?

Quelle est la fiabilité d'un examen complémentaire ?

Quel est le risque de complication d'un état pathologique, et quel est le risque d'un traitement ?

Le traitement A est-il plus efficace que le traitement B ?

Toutes ces questions, proprement médicales, reflètent une propriété fondamentale des systèmes biologiques qui est leur variabilité. Cette variabilité est la somme d'une variabilité expérimentale (liée au protocole de mesure et aussi aux appareils utilisés) et d'une variabilité proprement biologique. On peut ainsi décomposer la variabilité d'une grandeur mesurée en deux grandes composantes :

$$\boxed{\text{variabilité totale} = \text{variabilité biologique} + \text{variabilité métrologique.}}$$

La variabilité biologique peut être elle-même décomposée en deux termes : d'une part la variabilité intra-individuelle, qui fait que la même grandeur mesurée chez un sujet donné peut être soumise à des variations aléatoires ; et d'autre part la variabilité inter-individuelle qui fait que cette même grandeur varie d'un individu à l'autre.

$$\boxed{\text{variabilité biologique} = \text{variabilité intra-individuelle} + \text{variabilité inter-individuelle.}}$$

La variabilité intra-individuelle peut être observée lors de la mesure de la performance d'un athlète qui n'est pas capable des mêmes performances à chaque essai, mais qui se différencie des autres athlètes (variabilité inter-individuelle). En général, la variabilité intra est moindre que la variabilité inter.

La variabilité métrologique peut être elle aussi décomposée en deux termes : d'une part les conditions expérimentales dont les variations entraînent un facteur d'aléas ; et d'autre part les erreurs induites par l'appareil de mesure utilisé.

$$\boxed{\text{variabilité métrologique} = \text{variabilité expérimentale} + \text{variabilité appareil de mesure}}$$

3.3.2 La décision dans l'incertain

Pour prendre une décision diagnostique ou thérapeutique, le médecin ne peut pas être sûr, cent pour cent d'avoir fait le bon choix, mais il y a des méthodes statistiques pour minimiser le risque de faire le mauvaix choix. Dans sa démarche, le médecin doit en particulier, prendre en compte la variabilité naturelle des grandeurs qu'il manipule, pour distinguer ce qui est normal de ce qui est pathologique (décision à propos d'un patient) et pour évaluer la qualité d'un nouvel examen, ou d'une nouvelle thérapeutique (décision thérapeutique). La compréhension des méthodes statistiques, de leur puissance et de leurs limites, est essentielle pour un médecin de nos jours. Tout résultat de recherche médicale résulte d'une expérimentation (clinique ou biologique) qui s'appuie sur une méthodologie statistique rigoureuse, et dont les résultats sont analysés en termes statistiques.

3.4 Représentation des données

Il y a trois principales façons de représenter les données concernant un caractère statistique : représentation brute (ou en vrac), dans un tableau statistique et la représentation graphique.

On développe dans ce qui suit, par des exemples, les différentes façons de représenter des données, selon la nature du caractère statistique.

3.4.1 Caractère qualitatif

Pour un caractère qualitatif, on présente les données dans un tableau à plusieurs lignes. Dans la première ligne, on reporte les différentes modalités, et dans la deuxième ligne les effectifs corespondants. On peut également ajouter d'autres lignes , par exemple une ligne pour les fréquences et une autre pour les poucentages correspondants.

Il y a plusieurs façons de représenter graphiquement un caractère qualitatif, mais les plus utilisées sont les diagrammes en secteurs circulaires ou les diagrammes en bandes.

Exemple

On reprend l'exemple de la couleur des yeux et on suppose que le nombre des étudiants est 200 et qu'il y a quatre couleurs différentes.

Les données sont représentées dans un tableau statistique simple

Couleur des yeux : x_i	noire	noisette	bleu	verte	Total
effectif : n_i	120	30	30	20	200

Ce tableau peut être développé, en y ajoutant, par exemple, des lignes pour les fréquences relatives et les poucentages relatifs. On obtient alors le tableau statistique suivant.

Couleur des yeux : x_i	noire	noisette	bleue	verte	Total
effectif : n_i	120	30	30	20	200
fréquences relatives	$\frac{120}{200}$	$\frac{30}{200}$	$\frac{30}{200}$	$\frac{20}{200}$	1
pourcentages relatifs	60	15	15	10	100

La représentation en bandes (en TD)
La représentation en secteurs circulaires (en TD)

3.4.2 Caractère quantitatif discret

Dans le cas d'un caractère discret, on collecte la valeur du caractère chez chaque individu de la population et on représente ces valeurs de deux façons :

La représentation brute des données consiste à écrire les valeurs des observations une aprés une sans aucune manipulation.

La représentation des données groupées par valeurs consiste à représenter les données dans un tableau avec au moins deux lignes, dans la première ligne on inscrit les valeurs et dans la deuxième les effectifs correspondants. Parfois on ajoute d'autres lignes, par exemple pour les effectifs cummulés, les fréquences,... .

La représentation graphique se fait par le diagramme en bâtons **(en TD).**

Exemple.

Le recueil d'informations concernant le nombres d'enfants pour vingt famille à donné la suite de nombres suivante

$$3\ 2\ 1\ 0\ 2\ 3\ 4\ 0\ \ 2\ 3\ 1\ 0\ 3\ 5\ 6\ 6\ 5\ 6\ 5\ 4.$$

Cette suite est une réprésentation brute de la série des nombres d'enfants des vingt familles.

La représentation groupée par valeurs est

valeurs (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	Total
effectifs (n_i)	3	2	3	4	2	3	3	20

On peut ajouter à ce tableau d'autres lignes, par exemple, une ligne pour les effectifs cummulés (croissants) et une ligne pour les fréquences. On obtient alors le tableau suivant :

valeurs (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	Total
effectifs (n_i)	3	2	3	4	2	3	3	20
effectifs cummulés (n_icum)	3	5	8	12	14	17	20	
fréquences (f_i)	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	1

On peut également ajouter d'autres lignes pour y faire des calculs concernant le calcul de paramètres comme la moyenne m ou la variance σ^2.

La représentation des données groupées par valeurs peut aussi se faire par une suite de couples $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$, où les x_i sont les valeurs de la série et les n_i les effectifs. Néamoins la représentation dans un tableau est la plus commode, soit pour les calculs, soit pour éviter les subtilités.

3.4.3 Caractère quantitatif représenté en classes de valeurs.

Exemple

Les notes en mathématiques des élèves d'une classe de vingt élèves sont comme suit :

les notes de 4 élèves sont ≥ 6 et < 9, les notes de 7 élèves ≥ 9 et < 12, les notes de 6 élèves sont ≥ 12 et < 15, et 3 élèves avaient une note ≥ 15 et < 18.

La représentation de la série des notes de ces élèves en classes de valeurs d'amplitude 3 est

classes (C_i)	$[6;9[$	$[9;12[$	$[12;15[$	$[15;18[$	total
effectifs (n_i)	4	7	6	3	20

La représentation graphique d'un caractère, dont les valeurs sont représentées en classes et non en valeurs discrètes, se fait par un histogramme **(en TD)**. Dans un histogramme on représente les classes par des intervalles sur l'axe des abscisses, et on représente l'effectif (ou la fréquence de chaque classe) par un rectangle dont la superficie est proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence).

3.5 Les différents types de tableaux statistiques

Il y a trois types de tableaux en statistiques.

3.5.1 Tableaux de données.

Ces tableaux sont confectionnés pour collecter les données d'un ou de plusieurs caractères sur les sujets, d'une population ou d'un échantillon d'une population.

Exemple

Dans une classe de 15 élèves on a relevé sur le tableau suivant, les données concernant le sexe, le niveau de la langue française et la nationalité.

N°	sexe		français			moyenne générale			
	M	F	A	B	C	[7; 10[	[10; 13[	[13; 16[	[16; 19[
1	x			x		x			
2		x		x			x		
3	x		x		x		x		
4		x			x			x	
5	x				x		x		
6		x		x				x	
7		x	x				x		
8	x		x				x		
9		x		x			x		
10	x		x					x	
11		x	x						x
12		x		x			x		
13		x		x				x	
14		x	x			x			
15	x			x					x

dans ce tableau, on a utilisé les conventions suivantes.
Pour le sexe, M = sexe masculin, F = sexe féminin.
Pour la langue française, A = bon, B = moyen, C= faible.

3.5.2 Tableaux de distributions statistiques.

Ce type de tableaux est le plus connu. Il utilise généralement un tableau des données, pour exprimer la distribution statistique (c'est-à-dire la distibution des effectifs ou des fréquences) d'un ou de plusieurs caractères statistiques. Les tableaux statistiques déja rencontrés dans ce cours sont de ce type.

Exemple.

L'utilisation du tableau des données de l'exemple précédent donne le tableau suivant de la distribution statistique des moyennes générales des quinze élèves.

moyennes générales (x_i)	$[7; 10[$	$[10; 13[$	$[13; 16[$	$[16; 19[$	total
effectifs (n_i)	2	7	4	2	15

3.5.3 Tableau de contingence.

Ces tableaux sont constitués par croisement de deux variables statistiques. Leur élaboration nécessite de revenir au tableau initial de données et le dénombrement des sujets présentant simultanément deux valeurs des variables considérées. La fonction d'un tableau de contingence est de permettre de tester l'indépendance ou le lien entre deux variables.

Exemple.

Pour étudier la relation entre le sexe et la réussite scolaire des quinze élèves de l'exemple précédent, l'utilisation du tableau des données dans le même exemple donne le tableau de contingence suivant.

sexe\M.G	$[7; 10[$	$[10; 13[$	$[13; 16[$	$[16; 19[$	totaux
masculin	1	3	1	1	6
feminin	1	4	3	1	9
totaux	2	7	4	2	15

3.5.4 Utilisation des effectifs cummulés.

La ligne des effectifs cummulés dans un tableau statistique est utilisée pour trouver la valeur d'une observation dont on fixe le numéro : x_1 est la valeur des observations numéro $1, 2, ..., n_1 cum$,

x_2 est la valeur des observations numéro $n_1 cum + 1, n_1 cum + 2, ..., n_2 cum$,

...

x_r est la valeur des observations numéro $n_{r-1} cum + 1, n_{r-1} cum + 2, ..., n_r cum$.

Exemple.

Les données concernant le nombre d'enfants pour 200 familles sont présentées dans le tableau suivant

nombres d'enfants x_i	3	4	5	6	Total
effectif n_i de familles ayant x_i enfants	120	30	30	20	200

On ajoute à ce tableau une ligne pour les effectif cummulés, on obtient alors le tableau statistique suivant.

nombre d'enfants : x_i	3	4	5	6	Total
effectif : n_i	120	30	30	20	200
effectifs cummulés	120	150	180	200	

Dans cet exemple, on a
Le nombre des valeurs (ou modalités) est $r = 4$
Le nombre total d''observations ou l'effectif total est

$$\begin{aligned} N &= \sum_1^4 n_i \\ &= 120 + 30 + 30 + 20 \\ & 200. \end{aligned}$$

Les quatres modalités sont $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, et $x_4 = 6$.
$n_1 cum = n_1 = 120$,
$n_2 cum = n_1 cum + n_2 = 120 + 30 = 150$,
$n_3 cum = n_2 cum + n_3 = 150 + 30 = 180$,
$n_4 cum = n_3 cum + n_4 = 180 + 20 = 200$.
le numéro 61 est compris entre 1 et $n_1 cum = 120$, donc la valeur de l'observation numéro 61 est égale à 3.

La valeur de l'observation numéro 140 est égale à 4, car 140 est dans l'intervalle des entiers $[n_1 cum + 1; n_2 cum[= [121; 150[$.

3.6 Caractéristiques de tendance centrale

3.6.1 La moyenne arithmétique.

Définition

La moyenne arithétique noté $\overline{x}$ ou m, d'une série statistique simple représentée en données groupées en valeurs " $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_p, n_p)$ " est donnée par la formule

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i}. \tag{3.1}$$

Ici, p est le nombre des valeurs de la série statistique X, n_i est le nombre de repétition de la valeur x_i.

Remarque.

Si chaque valeur apparait une seul fois, ou si on répète dans le numérateur chaque x_i, n_i fois, la formule (3.1) devient

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \tag{3.2}$$

où N est le nombre total des termes de la série statistique, c'est-à- dire le nombre d'observations.

Exemple.

Soit les deux séries statistiques

$$X : 1,5; -1; 2; -1; 1,5; 2; 3; 1,5; 1,5; 1; -1$$
$$Y : 3; 2; 4; 1; 1; -2; 8; 7; 0; 10; -3$$

Les deux séries statistiques sont exprimées en représentation brute.

Pour la série X, puisque plusieurs valeurs de la série se répète, il vaut mieux utiliser la représentation des données groupées par valeurs.

x_i	-1	1	2	3	1.5
n_i	3	1	2	1	4

Pour la série Y, on ordonne les valeurs dans un ordre non décroissant,

$$Y : -3; -2; 0; 1; 2; 3; 4; 7; 10.$$

La moyenne arithmétique de X est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i} \\ &= \frac{(3\times -1)+(1\times 1)+(2\times 2)+(1\times 3)+(4\times 1.5)}{3+1+2+1+4} \\ &= \frac{11}{11} = 1.\end{aligned}$$

La formule (3.2) s'écrit ici

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \\ &= \frac{(-1)+(-1)+(-1)+1+2+2+3+1.5+1.5+1.5+1.5}{11} \\ &= \frac{11}{11} = 1.\end{aligned}$$

Pour calculer la moyenne $\overline{y}$ de la série Y, puisque chaque valeur de la série apparait uniquement une seule fois, on utilise la formule (3.2) pour avoir

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} \\ &= \frac{(-3)+(-2)+0+1+2+3+4+7+10}{9} \\ &= \frac{22}{9} = 2.44.\end{aligned}$$

Cas de données groupées en classes de valeurs. Si la série est représentée en classes de valeurs, on accepte une approximation de la moyenne par la même formule (3.1) , où

$$x_i = \frac{e_{i-1}+e_i}{2}$$

est le centre de la classe $[e_{i-1}, e_i[$.

3.6.2 Exemple

Soit une série statistique X, dont les données sont réprésentées par le tableau suivant, où C_i représente la classe (i.e. l'intervalle) $[e_{i-1}, e_i[$

.

c_i	$[-2;0[$	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$
n_i	3	2	2	1	3

Pour calculer la moyenne on ajoute une ligne dans laquelle on exprime les centres de classe, qu'on note x_i et on utilise la formule (3.1).

C_i	$[-2;0[$	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$
n_i	3	2	2	1	3
x_i	-1	1	3	5	7

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i} \\
&= \frac{(3\times -1)+(2\times 1)+(2\times 3)+(1\times 5)+(3\times 7)}{3+2+2+1+3} \\
&= \frac{31}{11}.
\end{aligned}$$

3.6.3 La médiane

Définition. La médiane d'une série est une valeur qui partage cette série, préalablement ordonnée, en deux sous séries ayant le même effectif. La mediane peut être une valeur de la série ou non.

Calcul de la médiane.

1)- Cas de série représentée par valeurs discrètes Si l'effectif N est impair la médiane M_e est égale à l'observation numéro $\frac{N-1}{2}+1$:

$$M_e = \left(\frac{N-1}{2}+1\right)^{ème} obs. \tag{3.3}$$

Si l'effectif est pair la médiane M_e est la moyenne des deux observations numéro $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$:

$$M_e = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{N}{2}\right)^{ème} obs. + \left(\frac{N}{2}+1\right)^{ème} obs.\right] \tag{3.4}$$

2)- Cas de série représentée par classes de valeurs On définit d'abord la classe médiane.

Définition de la classe médiane. La classe médiane est la classe contenant l'observation numéro $\frac{N}{2}$ si l'effectif total N est pair, ou l'oservation numéro $\frac{N+1}{2}$ si N est impair.

La médiane est un nombre qu'on calcule par La méthode d'interpolation linéaire. Cette méthode suppose que les observations de la classe médiane sont réparties d'une façon uniforme.

Définition de la valeur médiane La médiane M_e est définie par

$$M_e = e_{i-1} + k\frac{\frac{N}{2} - n_{i-1}cum}{n_i cum - n_{i-1}cum}, \tag{3.5}$$

où

e_{i-1} est la borne inférieure de la classe mediane,
k est l'amplitude de la classe médiane.
$n_{i-1}cum$ est l'effectif cummulé de la classe qui précède la classe médiane.
$n_i cum$ est l'effectif cummulé de la classe médiane.
On détermine la classe médiane de la façon suivante.

On ajoute une ligne pour les effectifs cummulés, pour l'utiliser dans la détermination de l'observation numéro $\frac{N}{2}$ ou $\frac{N+1}{2}$.

3.6.4 Exemple

On considère la série suivante, représentée en classes de valeurs.

c_i	$[-2;0[$	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$
n_i	3	2	2	1	3

Pour déterminer la médiane on commence par ajouter au tableau une ligne des effectifs cummulés :

c_i	$[-2;0[$	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$
n_i	3	2	2	1	3
$n_i cum$	3	5	7	8	11

L'effectif total est $N = 11$, c'est un entier impair.

$$\frac{N+1}{2} = \frac{11+1}{2} = 6$$

La classe médiane est celle contenant l'observation numéro 6, la classe médiane est donc $[2;4[$.

La médiane M_e par interpolation linéaire est

$$\begin{aligned} M_e &= e_{i-1} + k\frac{\frac{N}{2} - n_{i-1}cum}{n_icum - n_{i-1}cum} \\ &= 2 + 2\frac{5.5-5}{7-5} = 2.5. \end{aligned}$$

3.6.5 Le mode

Définition Le mode d'une série statistique simple est la valeur qui a le plus grand effectif. Une série peut avoir plusieurs modes.

Cas des données groupées en classes de valeurs Contrairement au cas des données discrètes, dans le cas des données groupées en classes de valeurs, le mode n'est pas toujours l'une des valeurs de la série, on se satisfait dans cette situation à définir la classe modale qui est la classe ayant le plus grand effectif.

3.6.6 Exemple.

Considérons l'exemple

c_i	$[-2;0[$	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$
n_i	3	2	5	1	3

La classe modale est $[2;4[$.