UNIVERSITE BATNA 2
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE
LICENCE EN TELECOMMUNICATIONS

Batna, le 24/01/2021

Travaux Dirigés N° 1 de la matière « Ondes et Propagation»

EXERCICE-1 :

Une onde électromagnétique plane se propage dans un milieu diélectrique parfait dans la direction de propagation + Oz. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que :

1/- Le champ électrique et magnétique sont perpendiculaires.

2/- Le champ électrique et magnétique appartiennent au plan d'onde.

3/- Le vecteur $P=E\wedge H$, a une seule composante dans la direction de propagation.

EXERCICE-2 :

Deux ondes électromagnétiques planes sinusoïdales de même pulsation ω et de même amplitude Em se propagent dans le vide dans les directions x et y respectivement. Les champs électriques E des deux ondes sont parallèles à OZ.

Ecrire en fonction de x, y et t les expressions de grandeurs suivantes :

1/- Les composantes du champ électrique E résultant.

2/- Les composantes du champ magnétique H résultant.

3/- Composantes du vecteur P.

EXERCICE-3 :

On considère un milieu réel caractérisé par :

ε : Constante diélectrique ou permittivité diélectrique

μ : Perméabilité magnétique

σ : Constante électrique ou conductivité

1/- Donner les unités des paramètres cités ci-dessus.

2/- En utilisant les équations de Maxwell, trouver les équations de propagation électromagnétique.

a/- En fonction du champ électrique.

b/- En fonction du champ magnétique.

<u>Solution</u>

<u>EX 1 :</u>

1/- <u>Le champ électrique et magnétique sont perpendiculaires</u> :

Il faut montrer que le produit scalaire entre le champ électrique E et le champ magnétique H est nul. Pour cela, nous allons utiliser les équations de Maxwell.

On commence par l'équation de Maxwell-Faraday :

$$Rot\vec{E} = -\mu\frac{d\vec{H}}{dt} \Leftrightarrow \nabla\Lambda\vec{E} = -\mu\frac{d\vec{H}}{dt} \text{ c-à-d}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ Ex & Ey & Ez \end{vmatrix} = -\mu\frac{d\left(Hx.\vec{i} + Hy.\vec{j} + Hz.\vec{k}\right)}{dt}$$

Puis l'équation de Maxwell-Gauss dans le cas d'un milieu sans charges (ρ=0):

$$Div\vec{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla.\vec{E} = \mathbf{0} \text{ c-à-d}: \frac{\partial Ex}{\partial x} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{\partial Ez}{\partial z} = \mathbf{0}$$

Comme la propagation est dans la direction des z alors :

$$\frac{\partial Ex}{\partial x} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial Ey}{\partial y} = \mathbf{0}$$

$$et \text{ par conséquent}: \frac{\partial Ez}{\partial z} = \mathbf{0} \Rightarrow Ez = \mathbf{0} \text{ (La composante longitudinale est nulle)}$$

$$Meme \text{ chose pour Div } \vec{H} = \mathbf{0}$$

$$et \text{ par conséquent}: \frac{\partial Hz}{\partial z} = \mathbf{0} \Rightarrow Hz = \mathbf{0} \text{ (La composante longitudinale est nulle)}$$

Alors :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \partial/\partial z \\ Ex & Ey & 0 \end{vmatrix} = -\mu\frac{d\left(Hx.\vec{i} + Hy.\vec{j}\right)}{dt} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial Ey}{\partial z} = -\mu\dfrac{dHx}{dt} \Rightarrow Ey = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}Hx \\ +\dfrac{\partial Ex}{\partial z} = -\mu\dfrac{dHy}{dt} \Rightarrow Ex = -\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}Hy \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{E}.\vec{H} = Ex.Hx + Ey.Hy + Ez.Hz = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(-Hy.Hx + Hx.Hy\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{H}$$

2/- <u>Le champ électrique et magnétique appartiennent au plan d'onde.</u>

Le plan d'onde est le plan qui est perpendiculaire à la direction de propagation +oz donc c'est le plan (XOY).

Et comme E et H possèdent deux composantes respectivement (Ex, Ey) et (Hx, Hy), alors : E et H appartiennent au plan d'onde.

3/- <u>Le vecteur P=E∧H, possède une seule composante dans la direction de propagation</u> :

$$\vec{P} = \vec{E}\Lambda\vec{H}^* = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Ex & Ey & 0 \\ Hx^* & Hy^* & 0 \end{vmatrix} = \left(Ex.Hy^* - Ey.Hx^*\right)\vec{k} \text{ (dans la direction de propagation)}$$

EX 2 :

1/- Les composantes du champ électrique E résultant.

$$\vec{E} \text{ a pour composantes} : \begin{cases} Ex = \mathbf{0} \\ Ey = \mathbf{0} \\ Ez = Em\left[\sin(\omega t - \beta.x) + \sin(\omega t - \beta.y)\right] \end{cases}$$

2/- Les composantes du champ magnétique H résultant.

Pour cela, on utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\mu\frac{d\vec{H}}{dt} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & Ez \end{vmatrix} = -\mu\frac{d\left(Hx.\vec{i} + Hy.\vec{j} + Hz.\vec{k}\right)}{dt} \Leftrightarrow \begin{cases} +\dfrac{\partial Ez}{\partial y} = -\mu\dfrac{dHx}{dt} \Rightarrow Hx = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mu}.\displaystyle\int\dfrac{\partial Ez}{\partial y}dt \\ -\dfrac{\partial Ez}{\partial x} = -\mu\dfrac{dHy}{dt} \Rightarrow Hy = +\dfrac{\mathbf{1}}{\mu}.\displaystyle\int\dfrac{\partial Ez}{\partial x}dt \\ \mathbf{0} = -\mu\dfrac{dHz}{dt} \Rightarrow Hz = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\text{Après developpement} : \begin{cases} Hx = \dfrac{\beta}{\mu.\omega}Em.\sin(\omega t - \beta.y) \\ Hy = -\dfrac{\beta}{\mu.\omega}Em.\sin(\omega t - \beta.x) \\ Hz = \mathbf{0} \end{cases}$$

3/- Composantes du vecteur P

$$\vec{P} = \vec{E}\Lambda\vec{H}^* = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathbf{0} & 0 & Ez \\ Hx^* & Hy^* & 0 \end{vmatrix} = (-Ez.Hy^*)\vec{i} + (Ez.Hx^*)\vec{j}$$

EX3 :

1/- Les unités

ε : Constante diélectrique ou permittivité diélectrique (Farad/m) : F/m

μ : Perméabilité magnétique (Henry/m) : H/m

σ : Constante électrique ou conductivité (Semens) : Ω^{-1}/m

2/-

a/-

$$rot\vec{E} = -\mu\frac{d\vec{H}}{dt} \Rightarrow rot.rot\vec{E} = rot\vec{E}(-\mu\frac{d\vec{H}}{dt}) = -\mu\frac{d}{dt}(rotH)$$

$$avec\ rot\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{d\vec{E}}{dt} \Rightarrow rot.rot\vec{E} = rot\vec{E}(-\mu\frac{d\vec{H}}{dt}) = -\mu\sigma\frac{d\vec{E}}{dt} - \varepsilon\mu\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} \quad (1)$$

$$\text{avec rot.rot}\vec{E} = \text{grad(DivE)} - \Delta E \text{ et divE} = \rho/\varepsilon \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \Delta E - \varepsilon\mu\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} - \mu\sigma\frac{d\vec{E}}{dt} = \text{grad}(\rho/\varepsilon) : \text{C'est l'équation de Helmholtz}$$

b/-

On peut montrer également que : $\Delta\vec{H} - \mu\varepsilon.\frac{d^2\vec{H}}{dt^2} - \mu\sigma\frac{d\vec{H}}{dt} = 0$