Chapitre 2

Éléments de calcul tensoriel

1. Introduction

La mécanique des milieux continus MMC est avant tout une théorie mathématique, et repose sur un formalisme un peu compliqué si on ne l'introduit pas avec clarté. C'est l'objet de ce chapitre. Il faut bien préciser qu'il ne s'agit en aucun cas d'un cours de maths, mais plutôt d'une caisse à outils pour le mécanicien.

II est parfaitement possible mais peu commode de présenter la théorie de la mécanique des milieux continus sans faire appel aux tenseurs.

2. Matrices

Une matrice m × n est une représentation de nombres sous forme d'un tableau de m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Chaque élément est désigné par deux indices i , j qui correspondent à sa position dans le tableau.

Si m = n, la matrice est dite carrée et si m = n = 1, elle se réduit à un scalaire. Les matrices sont très utiles pour résoudre simultanément les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.2}$$

qui peuvent toujours se mettre sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

ou sous forme compacte : $\boldsymbol{AX = B}$

A : est la matrice carrée d'ordre n contenant les coefficients du système linéaire

X : est le vecteur des variables inconnues

B : est le vecteur des variables connues

donc on transforme le vecteur X , en un vecteur B à l'aide de A, d'où la définition suivante :

Une matrice M est une application linéaire qui associe à tout vecteur V une image $\boldsymbol{V'}$

$$\boldsymbol{V} \xrightarrow{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{V' = M\,V} \tag{2.4}$$

Une matrice est dite matrice identité si elle associe à tout vecteur V le vecteur lui-même (elle ne fait aucune transformation du vecteur), elle est notée I :

$$\boldsymbol{V' = I\,V = V} \tag{2.5}$$

2.1 Déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre tel que :

si $\boldsymbol{A} = a_{11}$ est d'ordre 1 (1 × 1) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11} \tag{2.6}$$

si $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ est d'ordre 2 (2 × 2) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

si $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ est d'ordre 3 (3 × 3) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

si $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ est d'ordre n (n × n) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots + \cdots \pm a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

En élasticité, on se limite aux matrices d'ordre 3, (n = 3).

2.2 Opérations matricielles

A et B sont deux matrices de composantes a a_{ij} et b_{ij} et m est un scalaire.

1. Egalité

Deux matrices du même ordre sont égales si et seulement si toutes leurs composantes sont égales une à une :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \ : \ a_{ij} = b_{ij} \tag{2.7}$$

2. Transposée

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T \ : \ b_{ij} = a_{ji} \tag{2.8}$$

3. Multiplication par un scalaire

$$\boldsymbol{B} = m\boldsymbol{A} \ : \ b_{ij} = ma_{ji} \tag{2.9}$$

4. Multiplication matricielle

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \ : \ c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \tag{2.10}$$

5. Inversion matricielle

$$\boldsymbol{A}^{-1} \text{ inverse de } \boldsymbol{A} : \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{2.11}$$

Remarques

1. $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$
2. $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$
3. $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T$
4. $\det(m\boldsymbol{A}) \neq m \det(\boldsymbol{A})$

2.3 Matrice de rotation

Un point P de coordonnées (x , y) exprimées dans un repère X Y s'exprime par les coordonnées (x', y') lorsque le repère subi une rotation d'angle θ et devient $X'Y'$.

Les nouvelles coordonnées s'expriment en fonctions des anciennes coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta \end{aligned} \tag{2.12}$$

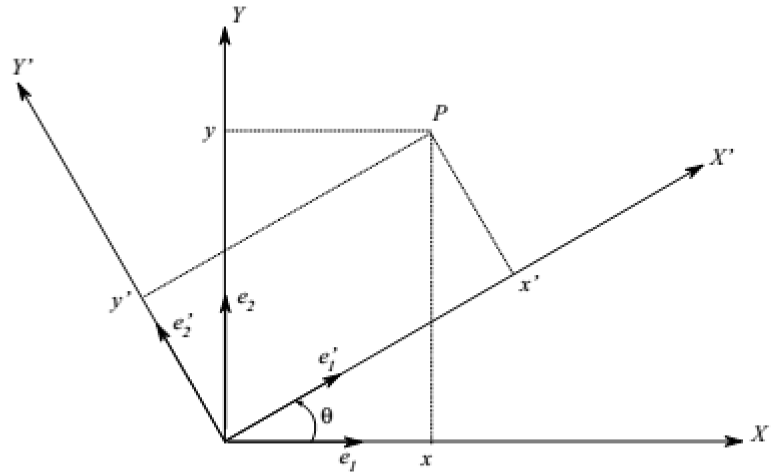
soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

ou encore, en plus compacte : $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{AV}$

A est la matrice de rotation de repère, elle contient les cosinus directeurs des nouveaux axes par rapport aux anciens axes. Si on note les vecteurs unitaires des axes originaux $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$, ceux des nouveaux axes $\boldsymbol{e}'_1$ et $\boldsymbol{e}'_2$

alors : $a_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$



2.4 Somme de deux rotations

Lorsque le repère $X'Y'$ subit lui aussi une rotation d'angle ϕ, les coordonnées (x', y') deviennent (x'', y'') tel que :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

soit : $\boldsymbol{V}'' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}'$

B est la matrice de la seconde rotation.

En fonction des coordonnées origines (x , y) :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

soit : $\boldsymbol{V}'' = \boldsymbol{BAV}$

Le produit matriciel donne :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

2.5 Inverse d'une rotation

Si le repère $(X'Y')$ subit une rotation d'angle −θ , on retrouve le repère initial (XY) , d'où :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

soit : $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}'$; $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T$

L'inverse d'une matrice de rotation est égale à sa transposée.

2.6 Rotation 3D

La rotation 2D fait changer les coordonnées x et y , la coordonnées z reste telle qu'elle $(z' = z)$.

On dit que la rotation 2D se fait par rapport à l'axe Z et on écrit le changement de coordonnées en incluant z comme suit :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

soit : $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{A}_z\boldsymbol{V}$

De même on écrit les matrices de rotations d'angles θ_x et θ_y par rapport aux axes X et Y comme suit :

$$\boldsymbol{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & \sin(\theta_x) \\ 0 & -\sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Remarque

Une rotation A_x par rapport à X suivie d'une rotation A_y par rapport à Y est différente de la rotation A_y suivie de la rotation A_x :

$$\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{A}_x \neq \boldsymbol{A}_x\boldsymbol{A}_y$$

3. Convention de sommation, « notation d'Einstein » indice muet

Considérons la somme:

$$s = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n \tag{3.1}$$

On peut écrire cette équation dans une forme compacte en utilisant le symbole de sommation:

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{3.2}$$

Il est clair que les équations suivantes ont exactement le même sens que la précédente:

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \tag{3.3}$$

$$s = \sum_{m=1}^{n} a_m x_m \tag{3.4}$$

Les indices *i*, *j*, m sont des indices muets, car la somme ne dépend pas de la lettre utilisée.

Nous pouvons simplifier l'écriture de l'équation 1.3 en adoptant la convention suivante:

Quand un *i* indice est répété une fois c'est un indice muet, indiquant une sommation sur cet indice allant de 1 à n. Cette convention est connue comme la **convention d'Einstein**, donc la formule 1.3 s'écrit en forme compacte:

$$s = a_i x_i \tag{3.5}$$

On note que :

$$s = a_i x_i = a_j x_j = a_m x_m \tag{3.6}$$

Seulement il faut préciser que la convention de sommation est utilisé que si l'indice est répété une fois, ce n'est pas le cas de la formule suivante:

$s = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i x_i$ Qui doit conserver le symbole de sommation.

Dans ce qui suit on prend souvent n=3 dans par exemple on a:

$$\begin{aligned} a_i x_i &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \\ a_{ii} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ a_i \vec{e}_i &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

La convention de sommation peut aussi être utilisée pour exprimer une double sommation, ex on peut écrire:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j \tag{3.7}$$

Comme suit:

$$a_{ij} x_i x_j \tag{3.8}$$

L'expression (3.8) donne une somme de 9 termes c.-à-d.

$$\begin{aligned} a_{ij}x_i x_j &= a_{i1}x_i x_1 + a_{i2}x_i x_2 + a_{i3}x_i x_3 = \\ & a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 \\ & + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Similairement pour la triple somme:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}x_i x_j x_k \tag{3.10}$$

qui s'écrit :

$$a_{ijk}x_i x_j x_k \tag{3.11}$$

c'est une somme de 27 termes.

Les expressions suivantes ne représentent pas des sommations:

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ii}x_i x_j x_j$ Ou $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}x_i x_i x_j x_k$

4. Indice libre

Considérons le système d'équation suivant:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

En utilisant la convention de sommation cette équation s'écrit:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{1m}x_m \\ x'_2 &= a_{2m}x_m \\ x'_3 &= a_{3m}x_m \end{aligned} \tag{4.2}$$

Qui peut être écrite comme suit:

$$x'_i = a_{im}x_m;\ i = 1,2,3 \tag{4.3}$$

Un indice qui apparait seulement une foi dans une équation est appelé indice libre, un indice libre prend alternativement les valeurs 1, 2, 3. Donc l'équation (4.3) représente trois équations dont chacune est la somme de trois termes.

Un autre exemple

$$\vec{e}'_i = Q_{im}\vec{e}_m;\ i = 1,2,3 \tag{4.4}$$

Qui s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= Q_{11}\vec{e}_1 + Q_{12}\vec{e}_2 + Q_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= Q_{21}\vec{e}_1 + Q_{22}\vec{e}_2 + Q_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= Q_{31}\vec{e}_1 + Q_{32}\vec{e}_2 + Q_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Notons que $x'_j = a_{jm}x_m;\ j=1,2,3$ équivaut l'équation (4.3) de même que $\vec{e}'_j = Q_{jm}\vec{e}_m;\ j=1,2,3$ avec (4.4).

mais *$a_i= b_j$ n'a aucun sens.* L'indice libre qui apparait dans chaque terme de l'équation doit être le même. Donc les équations suivantes sont valables.

$a_i+k_i= c_j$

$a_i+b_i\, c_j\, d_j =0$

S'il apparait deux indices libre dans une équation comme:

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm};\ j=1,2,3, i=1,2,3 \tag{4.6}$$

5. Symbole de Delta-Kronecker

Le symbole de Kronecker δ_{ij}, est définit par:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ i=j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases} \tag{5.1}$$

En autre terme la matrice qui représente le symbole de Kronecker est la matrice unité:

$\left[\delta_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ... On note les propriétés suivantes:

a) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1+1+1=3$

b) $\delta_{im}a_m = a_i$ (5.2)

c) $\delta_{im}T_{mj} = T_{ij}$ (5.3)

d) $\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij}$ et $\delta_{im}\delta_{mn}\delta_{nj} = \delta_{ij}$ (5.4)

e) Pour les vecteurs d'une base orthonormée on a: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ (5.5)

6. Symbole de permutation (Levy- Cevita)

Le symbole de permutation ε_{ijk}, est définit par:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \ \ si\ i,j,k\ forment\ une\ permutation\ paire \\ -1\ si\ i,j,k\ forment\ une\ permutation\ impaire \\ 0\ si\ i,j,k\ ne\ forment\ pas\ une\ permutation \end{cases} \quad (6.1)$$

On a:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$
$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$$
$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{223} = \dots = 0$$

Notons que: $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$ (6.2)

Pour les vecteurs d'une base orthonormée on a:

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$, ... Donc on peut utiliser le symbole de permutation et on obtient:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad (6.3)$$

Maintenant pour deux vecteurs arbitraires, $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ et $\vec{b} = b_i \vec{e}_i$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_i \vec{e}_i) \times (b_j \vec{e}_j) = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad (6.4)$$

On a la formule utile suivante:

$$\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$$

7. Changement de base

Considérons deux bases orthonormées (vecteurs de bases unitaires et orthogonaux entre eux), dont les bases respectives sont notées ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) et ($\vec{e}_1$*, $\vec{e}_2$*, $\vec{e}_3$*) Soient, P_{ij}, les coefficients caractérisant ce changement de repère.

$$P_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}^{*}_j$$

Ils peuvent s'interpréter comme les composantes du vecteur$\vec{e}_i$ dans le repère ($\vec{e}_1$*, $\vec{e}_2$*, $\vec{e}_3$*): $\vec{e}_i = P_{ij} \vec{e}^{*}_j$

et réciproquement, les coefficients P_{ij} peuvent s'interpréter comme les composantes du vecteur $\vec{e}_j$*, dans la base ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$): $\vec{e}^{*}_j = P_{ij} \vec{e}_i$

Que l'on peut aussi écrire : $\vec{e}^{*}_j = P^{T}_{ji} \vec{e}_i$

Donc on obtient: $\vec{e}_j^* = P_{ji}^T P_{ik} \vec{e}_k^*$

$$P_{ji}^T P_{ik} = \delta_{jk}$$

De la même façon on peut vérifier facilement

$$P_{ij} P_{jk}^T = \delta_{ik}$$

En notant P la matrice contenant les coefficients P_{ij}, les relations ci-dessus se réécrivent:

$$PP^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^T P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui indique que la matrice de passage P est une matrice orthogonale : son inverse et sa transposée coïncident.

8. Scalaire

Certaines grandeurs comme la masse volumique ou la température s'expriment par un seul nombre, qui ne dépend pas de la base choisie. Ce sont des scalaires. De manière plus mathématique, nous définirons un scalaire comme suit : *un scalaire s est un être mathématique à une seule composante et invariant lors d'un changement de base.*

9. Vecteur

Des grandeurs telles que la vitesse ou l'accélération d'un point matériel, un flux de chaleur ou une force sont caractérisés par leur direction, leur sens et leur intensité. Ce sont des vecteurs.

On les représente par un segment orienté. Un vecteur possède trois composantes qui dépendent du repère choisi ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$):

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = a_i\vec{e}_i$$

En utilisant la convention de sommation. Si l'on se réfère à la base ($\vec{e}_1$*, $\vec{e}_2$*, $\vec{e}_3$*) en peut écrire:

$$\vec{a} = a^*_i \vec{e}_i^*$$

Il s'agit toujours du même vecteur mais exprimé dans une autre base.

Il est capital de comprendre que lors d'un changement de base, les composantes du vecteur changent alors que le vecteur lui-même ne change pas. En clair, bien que les a_i sont différents des a^*_i, on a:

$$\vec{a} = a^*{}_i \vec{e}_i^{\,*} = a_i \vec{e}_i$$

Pour que cela soit possible, il faut que les composantes du vecteur se transforment comme : $a_i = P_{ij} a_j^*, \quad a_j^* = P_{ij} a_i$

En utilisant la notation matricielle, on peut écrire :

$$[\vec{a}] = P[\vec{a}]_* \quad , \qquad [\vec{a}]_* = P^T [\vec{a}]$$

10. Définition d'un tenseur

Soit A une application qui transforme un vecteur vers un autre. Si A transforme $\vec{a}$ vers $\vec{c}$ et $\vec{b}$ vers $\vec{d}$, on écrit:

$A(\vec{a}) = \vec{c}$ et $A(\vec{b}) = \vec{d}$

Si A possède les propriétés linéaires suivantes:

$$\mathrm{A}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{A}(\vec{a}) + A(\vec{b})) \tag{10.1}$$

$$\mathrm{a}(\alpha\vec{a}) = \alpha A(\vec{a}) \tag{10.2}$$

Où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs arbitraires, et α est un scalaire arbitraire, alors a est appelé une **transformation linéaire.** On appelle aussi A un **tenseur de second ordre** ou simplement un **tenseur**.

Si deux tenseurs, A et S, transforment un vecteur arbitraire de façon identique, ces deux tenseurs sont équivalents; ex $A\vec{a} = S\vec{a} \Rightarrow A = S$

10.1 Changement de bases d'un tenseur

Un tenseur d'ordre 2 est un être mathématique à 9 composantes qui, lors d'un changement de base $\vec{e}_i = P_{ij}\vec{e}_j^{\,*}$ se transforme selon les formules :

$A_{ij} = A_{ik} A^*_{kl} P^T_{lj} \quad , \quad A^*_{kl} = P^T_{ki} A_{ij} P_{jl}$

$\left[\overline{\overline{A}}\right] = P\left[\overline{\overline{A}}\right]_* P^T \quad , \quad \left[\overline{\overline{A}}\right]_* = P^T\left[\overline{\overline{A}}\right] P$

Un tenseur d'ordre 2 est une quantité intrinsèque indépendante de la base choisie alors que P est un tableau de nombre donnant les produits scalaires entre les vecteurs de la première et de la seconde base.

10.2 Tenseur identité

Le tenseur identité noté I est un tenseur particulier car ses composantes sont les mêmes dans toute base orthonormée et donnent la matrice identité :

$$[\bar{\bar{I}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.3 Tenseur symétrique et tenseur antisymétrique

Un tenseur est dit symétrique si $T=T^T$ donc les composantes d'un tenseur symétrique possèdent la propriété: $T_{ij}=T_{ji}$

Un tenseur est dit antisymétrique si $T=-T^T$ donc les composantes d'un tenseur antisymétrique possèdent la propriété: $T_{ij}=-T_{ji}$

Donc $T_{11}= T_{22}= T_{33}=0$.

Un tenseur T peut toujours être décomposé en une somme d'un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique, en effet: $T=T^S+T^A$

Où $T^S=(T+T^T)/2$ est symétrique

$T^A=(T-T^T)/2$ est antisymétrique

Il n'est pas difficile de montrer que cette décomposition est unique.

10.4 Produit tensoriel

Le produit tensoriel de deux vecteurs est un tenseur d'ordre 2 :

$$\bar{\bar{A}} = \vec{b} \otimes \vec{c} \qquad A_{ij} = b_i c_j$$

Le résultat d'un produit tensoriel est simple à définir. Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second (m = 1 pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2, . . .). Le résultat du produit tensoriel est un tenseur d'ordre $n+m$. Par exemple, le produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 4 :

10.5 Représentation spectrale d'un tenseur

On dit que $\vec{v}$ est une direction principale (ou un vecteur propre) du tenseur A d'ordre 2 si:

$$\overline{\overline{A}} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \qquad A_{ij} v_j = \lambda v_i$$

La valeur λ est appelée valeur principale (ou valeur propre) de A associée à la direction principale $\vec{v}$. Pour trouver $\vec{v}$, on écrit :

$$\left(\overline{\overline{A}} - \lambda \overline{\overline{I}}\right) . \vec{v} = 0 \qquad \left(A_{ij} \text{-} \lambda \delta_{ij}\right) v_j = 0$$

Ces équations constituent un système homogène de trois équations à trois inconnues v_1, v_2, v_3 qui n'admet de solution non triviale que si le déterminant de la matrice des coefficients s'annule :

$$\det(\overline{\overline{A}} - \lambda \overline{\overline{I}}) = 0 \qquad \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

L'équation ci-dessus donne trois racines λ_{I}, λ_{II}, λ_{III}. On calcule les vecteurs propres correspondants. Par exemple, pour λ_{I}, on aura:

$$(\overline{\overline{A}} - \lambda_{\mathrm{I}} \overline{\overline{I}}) \cdot \vec{v}_{\mathrm{I}} = 0$$

Ce qui ne détermine les composantes de $\vec{v}_{\mathrm{I}}$ qu'à un coefficient près. On peut choisir ce coefficient de manière à avoir un vecteur$\vec{v}_{\mathrm{I}}$ de norme unitaire. Si le tenseur A est réel et symétrique, l'algèbre matricielle nous apprend que les valeurs propres et vecteurs propres sont réels. Si les trois valeurs propres de A sont de plus distinctes, les trois vecteurs propres $\vec{v}_{\mathrm{I}}$, $\vec{v}_{\mathrm{II}}$, $\vec{v}_{\mathrm{III}}$, sont mutuellement orthogonaux

n conclusion, nous venons de voir que l'on peut toujours trouver trois vecteurs propres orthogonaux pour un tenseur réel symétrique d'ordre 2. La base formée par ces trois vecteurs est appelée base principale. Dans cette base, les coefficients du tenseur A forment une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres :

$$[\overline{\overline{A}}]_{I,II,III} = P^{\mathrm{T}} [\overline{\overline{A}}]_{1,2,3} P = \begin{bmatrix} \lambda_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\mathrm{III}} \end{bmatrix}$$

La matrice de passage est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_{\mathrm{I}} \cdot \vec{e}_1 & \vec{v}_{\mathrm{II}} \cdot \vec{e}_1 & \vec{v}_{\mathrm{III}} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{v}_{\mathrm{I}} \cdot \vec{e}_2 & \vec{v}_{\mathrm{II}} \cdot \vec{e}_2 & \vec{v}_{\mathrm{III}} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{v}_{\mathrm{I}} \cdot \vec{e}_3 & \vec{v}_{\mathrm{II}} \cdot \vec{e}_3 & \vec{v}_{\mathrm{III}} \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

11. Opérateurs différentiels:

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathrm{grad}} a &= \frac{\partial a}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3}\vec{e}_3 = a_{,i}\,\vec{e}_i \\
\Delta a &= \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} = a_{,ii} \\
\mathrm{div}\vec{a} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = a_{i,i} \\
\vec{\mathrm{rot}}\vec{a} &= (\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3})\vec{e}_1 + (\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1})\vec{e}_2 + (\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2})\vec{e}_3 = \varepsilon_{ijk}\,a_{k,j}\,\vec{e} \\
\vec{\mathrm{div}}\overline{\overline{A}} &= (\frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3})\vec{e}_1 + \\
&\quad (\frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3})\vec{e}_2 + \\
&\quad (\frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3})\vec{e}_3 = A_{ij,j}\,\vec{e}_i \\
\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\vec{a} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\vec{e}_1\otimes\vec{e}_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\vec{e}_1\otimes\vec{e}_3 + \\
&\quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\vec{e}_2\otimes\vec{e}_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\vec{e}_2\otimes\vec{e}_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\vec{e}_2\otimes\vec{e}_3 + \\
&\quad \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\vec{e}_3\otimes\vec{e}_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\vec{e}_3\otimes\vec{e}_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\vec{e}_3\otimes\vec{e}_3 = a_{i,j}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j \\
\vec{\Delta}\vec{a} &= \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2}\right)\vec{e}_1 + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_3^2}\right)\vec{e}_2 + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_3^2}\right)\vec{e}_3 = a_{i,jj}\,\vec{e}_i
\end{aligned}
$$