Corrigé Devoir à domicile

Exo1 : Simplification des expressions $(AB^TC)^T$; $(C^{-1}AC)^{-1}$

- $(AB^TC)^T = C^T(AB^T)^T = C^T(B^T)^TA^T = C^TBA^T$

  où bien : $= (B^TC)^TA^T = C^T(B^T)^TA^T = C^TBA^T$

- $(C^{-1}AC)^{-1} = C^{-1}(C^{-1}A)^{-1} = C^{-1}A^{-1}(C^{-1})^{-1} = C^{-1}AC$

  où bien $= (AC)^{-1}(C^{-1})^{-1} = C^{-1}A^{-1}C$

Exo2 : $u_1 = (x_1 - x_2)^2$; $u_2 = (x_2 - x_3)^2$; $u_3 = -x_1x_2$

1- Le tenseur gradient de la transformation

$\bar{F} = \text{grad}\,\vec{u} + I$

$$\text{grad}\,\vec{u} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 & -2x_1 + 2x_2 & 0 \\ 0 & 2x_2 - 2x_3 & -2x_2 + 2x_3 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour $P(0, 2, -1)$

$$\text{grad}\,\vec{u} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{F} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- Tenseur de dilatation de Cauchy-Green droit

$$\bar{C} = \bar{F}^t.\bar{F} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -12 & -2 \\ -12 & 65 & -42 \\ -2 & -42 & 37 \end{bmatrix}$$

3- Tenseur de dilatation de Cauchy-Green gauche

$$\bar{B} = \bar{F}.\bar{F}^t = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 28 & +6 \\ 28 & 85 & -6 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

4- Tenseur des déformation de Green-Lagrange

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\bar{C} - \bar{I}) = \begin{bmatrix} 6 & -6 & -1 \\ -6 & 32 & -21 \\ -1 & -21 & 18 \end{bmatrix}$$

5- Tenseur des petites déformations

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\overline{grad}\,\vec{u} + \overline{grad}^{T}\vec{u}\right)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

6- Tenseur des rotations infinitisimales

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\left(\overline{grad}\,\vec{u} - \overline{grad}^{T}\vec{u}\right)$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$