Chapitre 1

Introduction à la dynamique des structures

(Le mouvement harmonique simple)

1. Introduction

Le mouvement harmonique simple concerne un ensemble d'objets pouvant osciller ou vibrer. Il y a deux sortes de vibrations : les vibrations mécaniques, un ressort par exemple, ou bien des vibrations électriques, comme un signal radio. On l'appelle mouvement harmonique simple, à cause de la proportionnalité entre l'étirement, la compression et la force de rappel exercée par le ressort.

Un matériel élastique a tendance à reprendre sa forme originale après avoir été déformé. Ici, le terme élastique nous réfère à une force de rappel qui peut donner lieu à des vibrations ou oscillations. Pour beaucoup de matériaux, la force de rappel est directement proportionnelle à la déformation, si cette déformation n'est pas trop grande. Cette relation linéaire est bien connue, il s'agit de la loi de Hooke. En analysant selon une seule dimension, la force de rappel F_x est proportionnelle à la déformation x. Nous avons donc la relation suivante:

$$F_x = -kx \qquad (1)$$

où k est la constante de proportionnalité et le signe moins indique que la force est dans le sens contraire de la déformation. Dans le cas d'une force de rappel associée à un ressort, k, est la constante du ressort, et dépend de la rigidité de ce ressort.

Une particule ou un objet se déplaçant sous l'influence d'une force de rappel linéaire, comme c'est le cas pour la loi de Hooke, décrit un mouvement harmonique simple (M.H.S.). Ce mouvement d'oscillation périodique est l'un des plus fréquents dans la nature. La période d'oscillation d'un objet dans un mouvement harmonique simple est reliée à la constante de proportionnalité de la loi de Hooke.

2. Mouvements d’oscillation

Parmi les mouvements périodiques, nous nous intéresserons aux objets effectuant des oscillations périodiques de part et d’autre d’une position d’équilibre.

Exemples: masse suspendue à un ressort, pendule, diapason frappé, lame vibrante,.. (Figure 1)

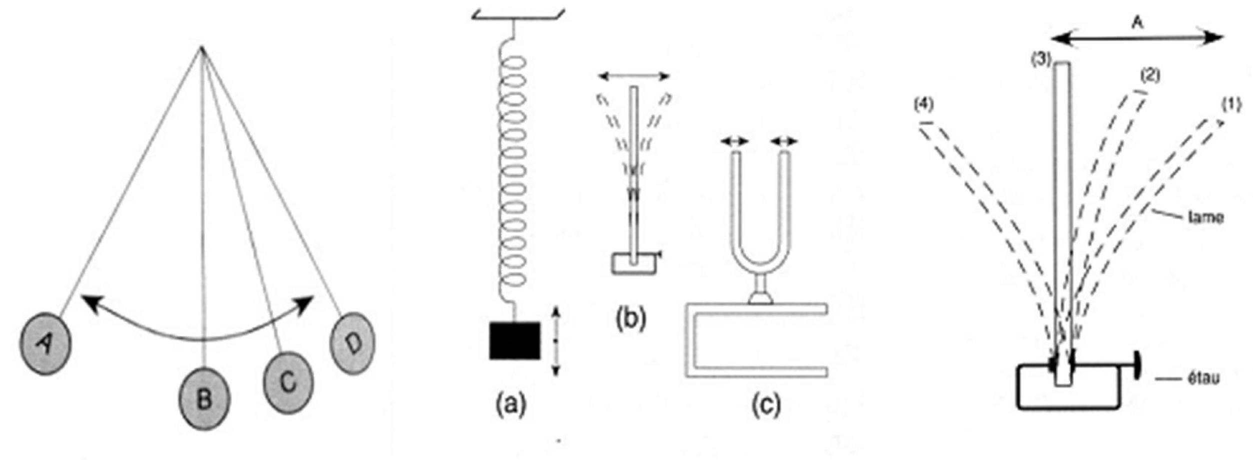

Figure 1

__Oscillateur__ objet décrivant un mouvement de va et vient de part et d’autre d’une position d’équilibre 0

__Oscillation__ mouvement de l’oscillateur

__L’élongation y__ distance qui sépare l’objet de sa position d’équilibre 0

__Amplitude A__ valeur maximale de l’élongation *y*

__Période T__ durée d’une oscillation complète (temps pour aller d’un point et y revenir dans le même sens). La période *T* se mesure en seconde (s)

__Fréquence f__ nombre d’oscillations effectuées en une seconde. Elle se mesure en hertz (Hz), 1hz = 1 vibration / s

La fréquence f et la période T sont liées par la relation $f = 1/T$

3. La loi de Hooke

Robert Hooke (1635-1703), physicien anglais, a été le premier à démontrer que la force de rappel de plusieurs matériaux élastiques était, à l'intérieur d'une certaine limite, proportionnelle à la déformation. En une dimension, cette loi bien connue sous le nom de la loi de Hooke s'écrit de la façon suivante :

$$F_x = -k\Delta x = -k(x - x_0) \qquad (2)$$

(on retrouve l'équation 1 si $x_o = 0$.)

où Δx est la déformation linéaire ou le déplacement de la masse attachée au ressort, et x_0 est la position initiale. Le signe moins nous indique que la force est de sens opposé au déplacement.

L'étude de la résistance des matériaux nous permet d'exprimer la loi de Hooke sous la forme suivante:

$$|F| = \left(\frac{YA}{L_0}\right)\Delta L \qquad (3)$$

où $k = YA/L_0$.Pour ce type de ressort, l'effort est pratiquement un effort de cisaillement, et la constante k, appelée la constante du ressort, dépend du module de cisaillement du fil métallique constituant le ressort, du rayon des spires ainsi que du nombre de spires.

La constante du ressort est quelquefois appelée « constante de rigidité », nous donnant une indication de la rigidité du ressort. Plus k est élevée plus la rigidité est grande. Comme nous pouvons nous en rendre compte dans l'équation 2, la constante k est exprimée en N/m.

En accord avec la loi de Hooke, la force de rappel du ressort est directement proportionnelle à son allongement. Prenons l'exemple illustré (figure 2), un ressort de longueur initiale y_0 s'étire d'une longueur y_1 si on lui suspend une masse m.

L'équilibre s'obtient lorsque la force de rappel du ressort est égale à la force d'allongement, ici, la force gravitationnelle soit:

$$F_1 = mg = k(y_1 - y_0) \tag{4}$$

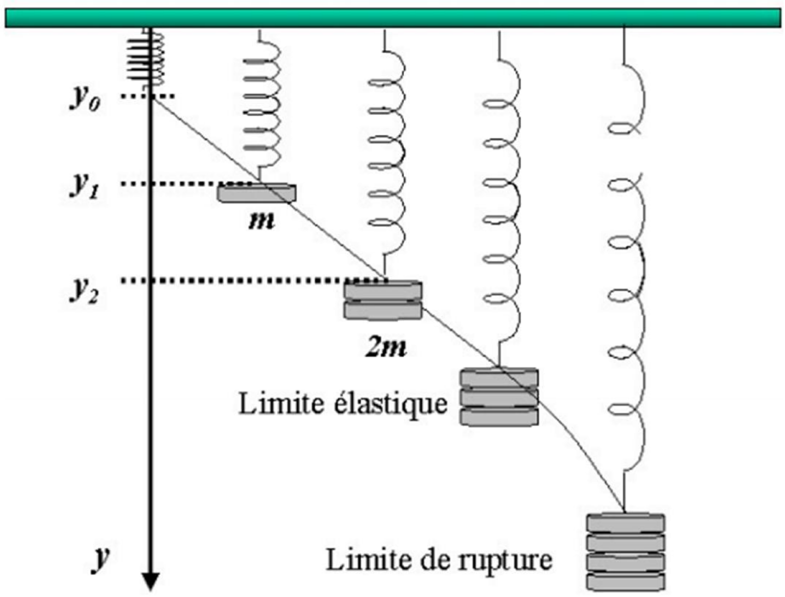

Figure 2

Nous utilisons ici l'axe y pour indiquer la direction verticale plutôt que l'axe x, comme c'est le cas dans l'équation 2, qui est plus souvent utilisé pour une direction horizontale. De la même façon, si nous ajoutons une seconde masse m le système s'étirera jusqu'à une longueur y_2,

$$F_2 = 2mg = k(y_2 - y_0) \tag{5}$$

et ainsi de suite. La relation linéaire de la loi de Hooke est valide tant que l'élongation n'est pas trop grande. Par exemple, si nous dépassons la limite élastique le ressort subira une déformation permanente et pourrait même se rompre si nous dépassions la limite de rupture.

La loi de Hooke peut s'écrire :

$$F = k(y - y_0) = ky - ky_0 \tag{6}$$

qui peut être présentée sous la forme générale :

$$y = mx + b \tag{7}$$

4. Mouvement harmonique simple

Lorsque la position d'un objet se répète de façon régulière, on peut alors parler de mouvement périodique. Par exemple, que l'on observe l'oscillation d'un pendule, ou encore le déplacement d'un système masse-ressort, on remarque que dans chaque cas la position oscille autour d'une position d'équilibre.

Dans le dernier cas, le système est sous l'influence d'une force de rappel décrite par la loi de Hooke, et son mouvement est appelé, mouvement harmonique simple (M.H.S.)

Tel qu'illustré à la figure 3, un bloc oscillant trace une courbe sinusoïdale sur une bande de papier se déplaçant à vitesse constante.

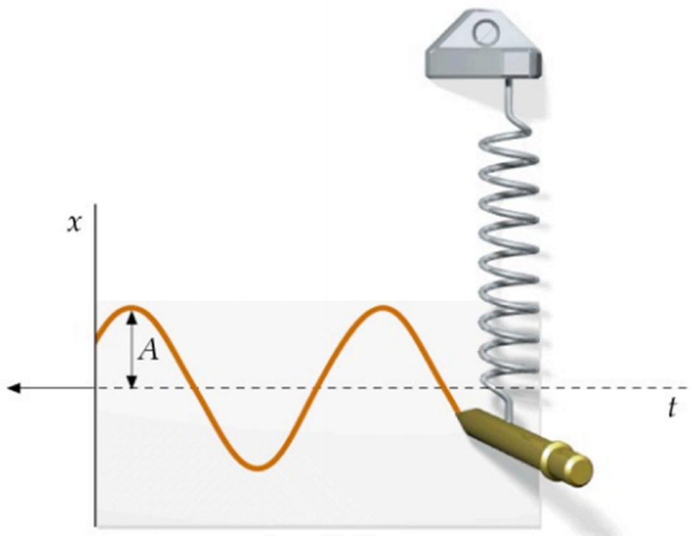

Figure 3

L'équation du mouvement peut être représentée par :

$$y_t = A sins\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) \tag{8}$$

où T est la période d'oscillation et A l'amplitude ou le déplacement maximal. L'amplitude dépend des conditions initiales (i.e. du déplacement initial de la masse par rapport à sa position d'équilibre).

Si la masse était initialement déplacée en dessous de sa position d'équilibre puis relâchée (soit $y_0 = -A$), l'équation du mouvement pourrait s'écrire de la façon suivante:

$$y_t = A\,sins\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (9)$$

ce qui satisfait à la condition initiale soit à $t = 0$ s; $y = -A$.

L'argument du sinus $(2\pi / T + \phi)$, doit être exprimé en radians.

Dans cette expérience, vous allez remarquer que l'amplitude décroît très lentement avec le temps, cela s'explique par l'énergie perdue en friction, et le mouvement d'oscillation est alors très légèrement amorti. Dans certaines applications cependant, le mouvement harmonique est volontairement amorti (amortissement surcritique). Par exemple, une simple lecture sur un pèse personne serait difficile à obtenir de façon rapide et précise si le mouvement de l'aiguille n'était pas amorti de façon significative.

La période d'oscillation dépend des paramètres du système, et dans le cas d'un système masse-ressort peut s'écrire de la façon suivante :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\pi}} \qquad (10)$$

5. Lois de la vitesse et de l'accélération

Soit un mobile P se déplaçant sur un axe OY. Si y_1 désigne l'abscisse à l'instant t_1, et y_2 celle à l'instant t_2, alors il parcourt une distance $\Delta y = y_2 - y_1$ au cours de l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, et sa vitesse moyenne au cours de cet intervalle se calcule par:

$$v_{moy} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (11)$$

Pour déterminer la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_1, il faut calculer la vitesse moyenne sur un intervalle où t_2 est infiniment proche de t_1. Par définition :

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t) \tag{12}$$

c'est-à-dire la dérivée de $y(t)$ par rapport à t.

De même pour l'accélération :

$$a_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = y''(t) \tag{13}$$

Elles sont donc obtenues par dérivation par rapport au temps de la fonction espace y (ou loi du mouvement) pour la vitesse et par dérivation de la loi de la vitesse pour l'accélération.

$$v(t) = y' = A\omega cos(\omega t + \varphi) \tag{14}$$

$$a(t) = y'' = -A\omega^2 sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y \tag{15}$$