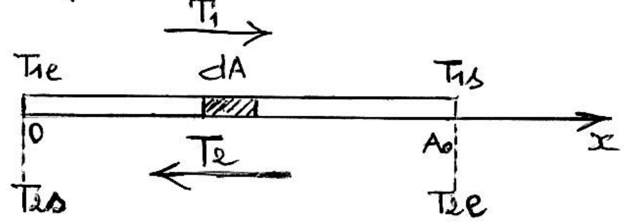
Chapitre 3 : Calcul analytique des échangeurs (1)

3.1 Echangeur à contre-courants

Soit un échangeur à contre-courants, de surface d'échange totale A_0, et soit dA un élément de surface d'échange.



$$dQ = -m_1 c_{p1} dT_1 = -m_2 c_{p2} dT_2 \qquad (1)$$

$$dQ = K_x \, dA \, (T_1 - T_2) \qquad (2)$$

Hypothèses : $K_x = K$ = Constante

$$dT_1 = -\frac{dQ}{m_1 c_{p1}} \; ; \; dT_2 = -\frac{dQ}{m_2 c_{p2}} \qquad (3);(3')$$

$$dT_1 - dT_2 = d(T_1 - T_2)$$

$$= dQ\left(-\frac{1}{m_1 c_{p1}} + \frac{1}{m_2 c_{p2}}\right)$$

$$d(T_1 - T_2) = -K \, dA \, (T_1 - T_2)\left(\frac{1}{m_1 c_{p1}} - \frac{1}{m_2 c_{p2}}\right) \qquad (4)$$

$$T = T_1 - T_2$$

$$\frac{dT}{T} = -K\left(\frac{1}{m_1 c_{p1}} - \frac{1}{m_2 c_{p2}}\right) \cdot dA = -K\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) dA \qquad (5)$$

$$\int_{T_{1e-2s}}^{T_{1s}-T_{2e}} \frac{dT}{T} = -K\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) \int_0^{A_0} dA \qquad (6)$$

$A = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 = T_{1e} - T_{2s}$

$A = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 = T_{1s} - T_{2e}$

$$\ln \frac{T_{1s} - T_{2e}}{T_{1e} - T_{2s}} = -K\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) \cdot A_0 \qquad (7)$$

$$d(T_1 - T_2) = -dQ\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) \qquad (8)$$

... / ...

$$\int_{T_{1e}-T_{2s}}^{T_{1s}-T_{2e}} d(T_1-T_2) = -Q\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_2}\right) \qquad (9)$$

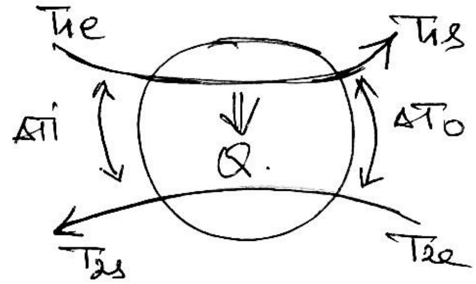
$$(T_{1s}-T_{2e})-(T_{1e}-T_{2s}) = -Q\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_2}\right) \qquad (10)$$

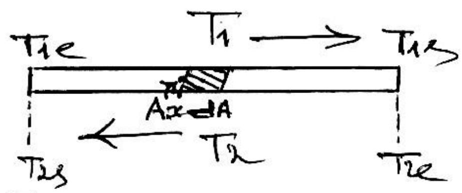
$$Q = K\,A_0 . \Delta T_m \qquad (11)$$

$$\frac{-Q}{-K\,A_0} = \frac{(T_{1s}-T_{2e})-(T_{1e}-T_{2s})}{\ln\dfrac{T_{1s}-T_{2e}}{T_{1e}-T_{2s}}} \qquad (12)$$

$$Q = K . A_0 . \frac{\Delta T_0 - \Delta T_i}{\ln\dfrac{\Delta T_0}{\Delta T_i}} \qquad \Delta T_0 = T_{1s}-T_{2e} \quad \Delta T_i = T_{1e}-T_{2s} \qquad (13)$$

$$Q = K . A_0\, \Delta T_{ml} \quad ; \quad \Delta T_m = \Delta T_{ml} \qquad (14)$$





$$\int_{T_{1e}-T_{2s}}^{T_1-T_2} \frac{d(T_1-T_2)}{T_1-T_2} = -K\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_2}\right)A_x \qquad (15)$$

$$\ln\frac{T_1-T_2}{T_{1e}-T_{2s}} = -K\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_2}\right)A_x \Rightarrow \qquad (16)$$

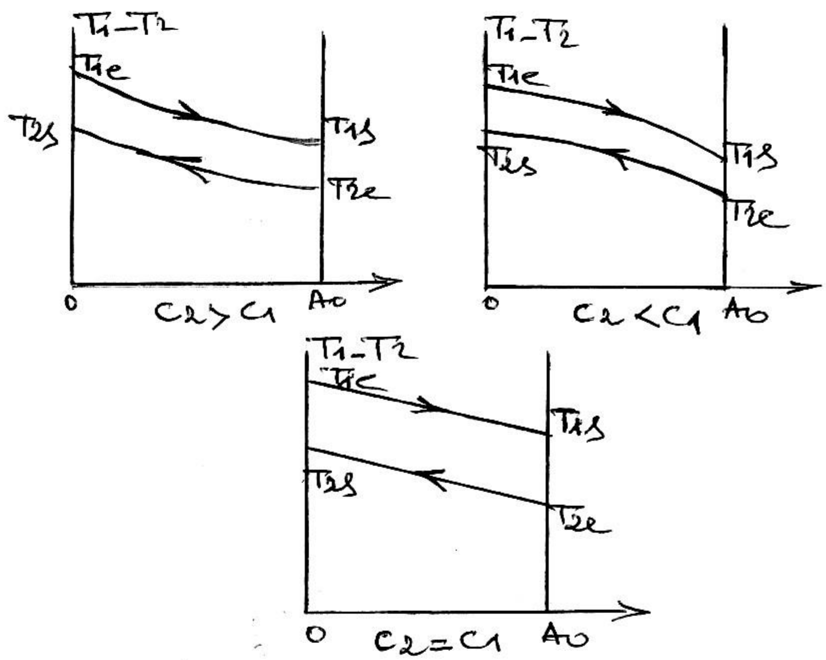
.../...

$$\Rightarrow T_1 - T_2 = (T_{1e} - T_{2s})\, e^{-K\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) A x} \qquad (17)$$

$\frac{1}{C_1} > \frac{1}{C_2} \Leftrightarrow C_2 > C_1$ exposant < 0

$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_2 = C_1 \quad T_1 - T_2 = T_{1e} - T_{2s}$

$\frac{1}{C_1} < \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_2 < C_1$ exposant > 0



On démontre que :

$$Nut_1 = \frac{1}{1 - R_1} \ln \frac{1 - \mathcal{E}_1 R_1}{1 - \mathcal{E}_1} \qquad (18)$$

$$Nut_2 = \frac{1}{1 - R_2} \ln \frac{1 - \mathcal{E}_2 R_2}{1 - \mathcal{E}_2} \qquad (19)$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1 - e^{-Nut_1(1-R_1)}}{1 - R_1 e^{-Nut_1(1-R_1)}} \; (20) \quad ; \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1 - e^{-Nut_2(1-R_2)}}{1 - R_2 Nut_2 (1-R_2)} \; (21)$$

... / ...

• Cas particuliers

$$- \left.\begin{array}{l} m_1 c_{p1} = m_2 c_{p2} \\ C_1 = C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow R_1 = R_2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{0}{0} \text{ indeterminé}$$

$R_1 = 1 + \alpha$, $\alpha \to 0$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1 - e^{-Nut_1(1-1-\alpha)}}{1-(1+\alpha)e^{-Nut_1(1-1-\alpha)}} = \frac{1 - e^{-Nut_1 \alpha}}{1-(1+\alpha)e^{-Nut_1 \alpha}}$$

$$e^{Nut_1 \alpha} \simeq 1 + Nut_1 \alpha$$

$$\frac{1-(1+Nut_1 . \alpha)}{1-(1+\alpha)(1+Nut_1 \alpha)} = \frac{-Nut_1 \alpha}{1-1-Nut_1\alpha - \underbrace{Nut_1\alpha^2}_{\text{négligé}} - \alpha}$$

$$= \frac{-\alpha(Nut_1)}{-\alpha(Nut_1+1)} = \frac{Nut_1}{Nut_1+1}$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Nut_1}{Nut_1+1} \; ; \; \mathcal{E}_2 = \frac{Nut_2}{Nut_2+1} \qquad (22);(23)$$

$- R = 0 \quad R_1 = \frac{m_1 c_{p1}}{m_2 c_{p2}}$ (fluide 2 change d'état)

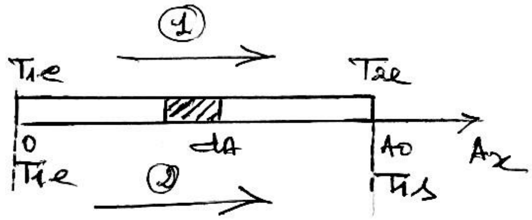
Cas d'un changement d'état : $(m_1 c_{p1}) \simeq 0$

$$\mathcal{E}_1 = 1 - e^{-Nut_1} \qquad (24) \qquad (m_2 c_{p2}) \simeq \infty$$

$$\mathcal{E}_2 = 1 - e^{-Nut_2} \qquad (25)$$

Les évaporateurs et les condenseurs sont des échangeurs à changement de phase

3.2 Echangeurs à co-courants



$$dQ = K(T_1 - T_2)\,dA = -m_1 c_{p1}\, dT_1 = m_2 c_{p2}\, dT_2 \qquad (26)$$

$$dT_1 = \frac{-dQ}{m_1 c_{p1}}, \quad dT_2 = \frac{dQ}{m_2 c_{p2}} \qquad (27),(28)$$

$$d(T_1 - T_2) = dT_1 - dT_2 = -dQ\left(\frac{1}{m_1 c_{p1}} + \frac{1}{m_2 c_{p2}}\right) \qquad (29)$$

$$\frac{d(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2} = -K\,dA\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \qquad (30)$$

$$\int_{T_{1e}-T_{2e}}^{T_{1s}-T_{2s}} \frac{d(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2} = -K\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_0^{A_0} dA \Rightarrow \underline{\underline{\ln\frac{T_{1s} - T_{2s}}{T_{1e} - T_{2e}} = -K A_0\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}} \qquad (31)$$

$$d(T_1 - T_2) = -dQ\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \qquad (32)$$

$$\int_{T_{1e}-T_{2e}}^{T_{1s}-T_{2s}} d(T_1 - T_2) = -Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \qquad (33)$$

$$\underline{\underline{(T_{1s} - T_{2s}) - (T_{1e} - T_{2e}) = -Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}} \qquad (34)$$

$$\frac{(T_{1s} - T_{2s}) - (T_{1e} - T_{2e})}{\ln\dfrac{T_{1s} - T_{2s}}{T_{1e} - T_{2e}}} = \frac{-Q}{K A_0} \qquad (35)$$

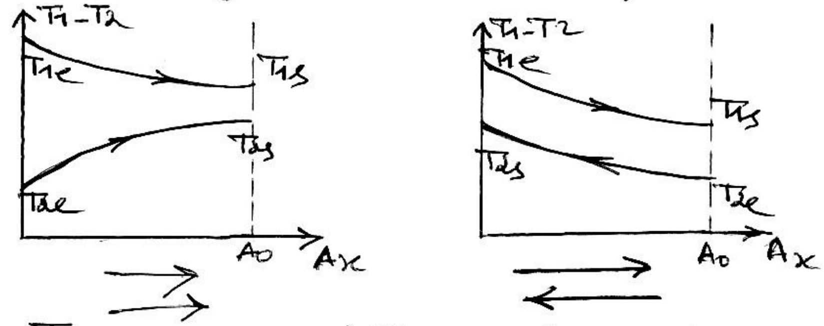
$$\Rightarrow Q = K A_0\, \Delta T_{ml} = K A_0 \frac{\Delta T_0 - \Delta T_l}{\ln\dfrac{\Delta T_0}{\Delta T_l}} \qquad (36)$$

$$\Delta T_m = \Delta T_{ml} = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_l}{\ln\dfrac{\Delta T_0}{\Delta T_l}} \qquad (37)$$

…/…

$$\ln \frac{T_1 - T_2}{T_{1e} - T_{2e}} = -K\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) A_x \qquad (38)$$

$$T_1 - T_2 = \left(T_{1e} - T_{2e}\right) e^{-K\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) A_x} \qquad (39)$$



T_{2s} ne peut pas être $> T_{1s}$ $\qquad$ T_{2s} peut être $> T_{1s}$

L'échangeur à contre-courants est plus efficace.

Co-courants

$$Nut_1 = \frac{1}{1 + R_1} \ln \left[\frac{1}{1 - \varepsilon_1 (1 + R_1)}\right] \qquad (40)$$

$$Nut_2 = \frac{1}{1 + R_2} \ln \left[\frac{1}{1 - \varepsilon_2 (1 + R_2)}\right] \qquad (41)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + R_1} \left[1 - e^{-(1 + R_1) Nut_1}\right] \qquad (42)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{1 + R_2} \left[1 - e^{-(1 + R_2) Nut_2}\right] \qquad (43)$$

- Cas particuliers

$$R_1 \simeq 0\ ,\quad \varepsilon_1 = 1 - e^{-N_{ut1}} \qquad (44)$$

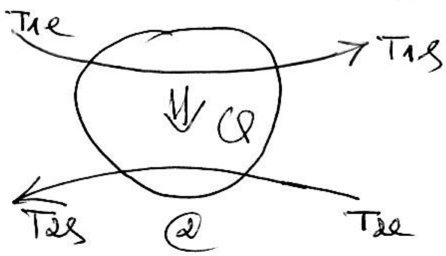
(fluide 2 change d'état $m_2 c_{p2} \simeq \infty$)

3.3 Méthode d'étude des échangeurs à courants croisés

- Calcul du ΔT_m

$$\Delta T_m = F.\ \Delta T_{ml}\ ;\ F = \text{facteur de correction} \qquad (45)$$

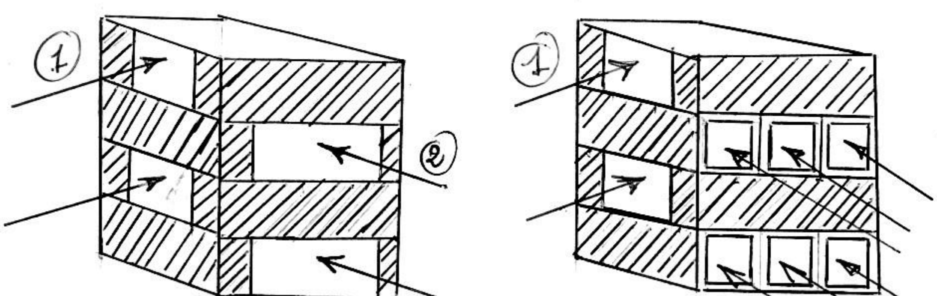
$\Delta T_{ml} = \Delta T_{ml}$ échangeur à contre-courants



- Fluide brassé et non brassé

Un fluide est dit brassé (ou mélangé) si on ne peut suivre les lignes de courant. A l'opposé, un fluide est non brassé est celui dont on peut suivre ces lignes de courant.

Le schéma ci-dessous représente les différences entre un fluide brassé et non brassé.



a) ① et ② fluides brassés

b) ① : fluide brassé
② : fluide non brassé

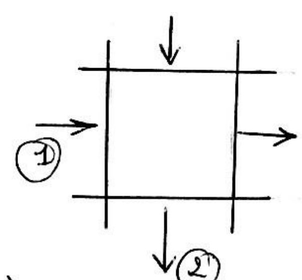
- Facteur de Correction F

Le facteur de correction est déterminé à partir d'abaques (cas des échangeurs à courants croisés), pour les échangeurs les plus courants.

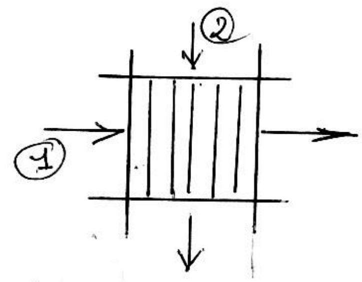
$$F = f(R, \mathcal{E}, \text{arrangement})$$

avec $R = \dfrac{(mcp)_{min}}{(mcp)_{max}}$ (Rapport des capacités)

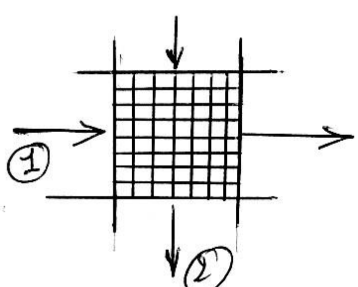
$$\mathcal{E} = \frac{\Delta T_1 \text{ ou } \Delta T_2}{\Delta T_{max}} \quad \text{(efficacité)}.$$



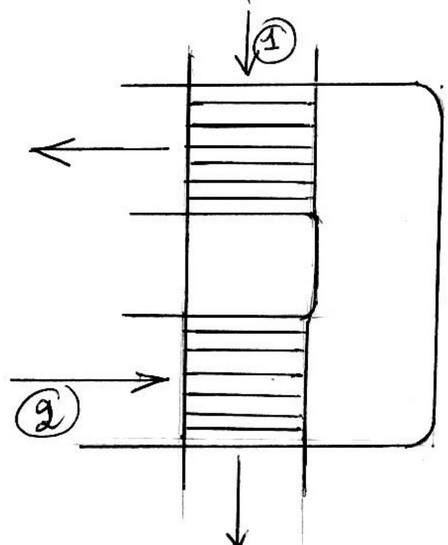
a) 1 : fluide brassé
2 : fluide brassé



b) 1 : fluide brassé
2 : fluide non brassé



c) 2 fluides non brassés



d) Double croisement

- La figure 1 explique brièvement la méthodologie à suivre pour déterminer F.

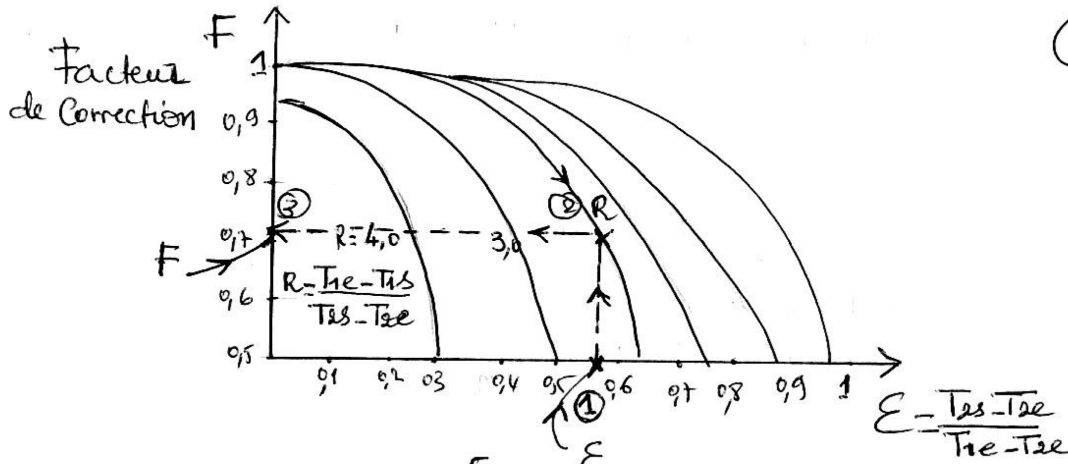


figure 1 : facteur de correction F

- Efficacité

Courants croisés (une seule passe)

– ① fluide brassé ; ② fluide non brassé

$$\mathcal{E} = 1 - \exp\left[1 - \exp(-R - Nut)\right] \qquad (46)$$

– ① fluide non brassé ; ② fluide brassé

$$\mathcal{E} = R \left\{1 - \exp\left[-\frac{1}{R}\left(1 - \exp(-Nut)\right]\right. \qquad (47)$$

– 2 fluides non brassés :

$$\mathcal{E} = \frac{Nut}{\dfrac{Nut}{1 - e^{-Nut}} + R\,\dfrac{Nut}{1 - e^{-RNut}} - 1} \qquad (48)$$

3.4 Ecoulement dans une calandre

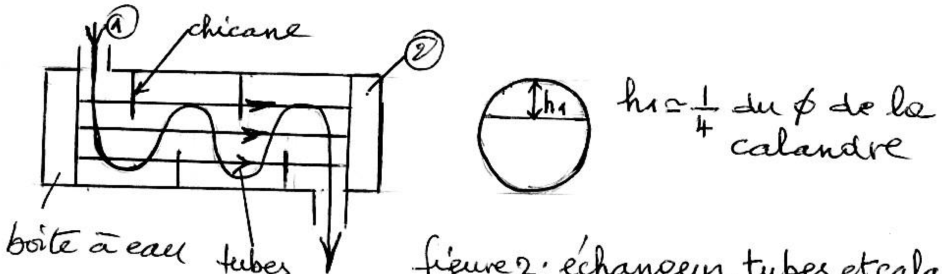


figure 2 : échangeur tubes et calandre

A cause des chicanes, l'écoulement est soit parallèle ou perpendiculaire au faisceau de tubes

…/…

Pour une calandre normalisee, laissant un passage libre de chicane d'une hauteur égale à 25% du ϕ interieur de la calandre.

- Pour le régime turbulent et établi (cas fréquent), et pour le calcul du coefficient d'échange interne aux tubes – hi –, on utilise la corrélation suivante :

$$Nu = 0{,}023\ Re^{0,8} \cdot Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_{Tf}}{\mu_{Tp}}\right)^{0,14} \qquad (49)$$

Valable pour : $Re > 10.000$

$0{,}7 < Pr < 160$

avec $Nu = \frac{hi \cdot Di}{\lambda}$; $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot Dh}{\mu}$

$Pr = \frac{\mu \cdot Cp}{\lambda}$

Les propriétés physiques du fluide sont calculées à la température calorique.

- Pour les autres régimes d'écoulement et pour les autres nombres de Prandtl → Consulter la documentation spécialisée.

- Pour le calcul du coefficient d'échange externe aux tubes – ho –, on peut utiliser l'expression :

$$\frac{ho \cdot De}{\lambda} = 0{,}36\ Re^{0,55} \cdot Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_{Tf}}{\mu_{Tp}}\right)^{0,14} \quad \text{(Kern)} \qquad (50)$$

avec $Re > 2000$

$$Re = \frac{G \cdot Dh}{\mu}$$

$$G = \frac{\dot{m}\ calandre}{Di \times \ell \cdot \left(\frac{P - de}{P}\right)} \qquad (51)$$

.../...

$\dot{m}$ = débit massique du fluide "calandre". (11)

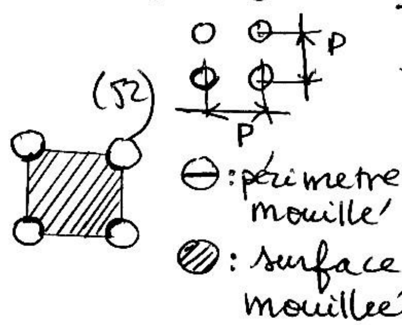
D_i = ϕ intérieur de la calandre

d_e = ϕ extérieur des tubes

l = espacement des chicanes

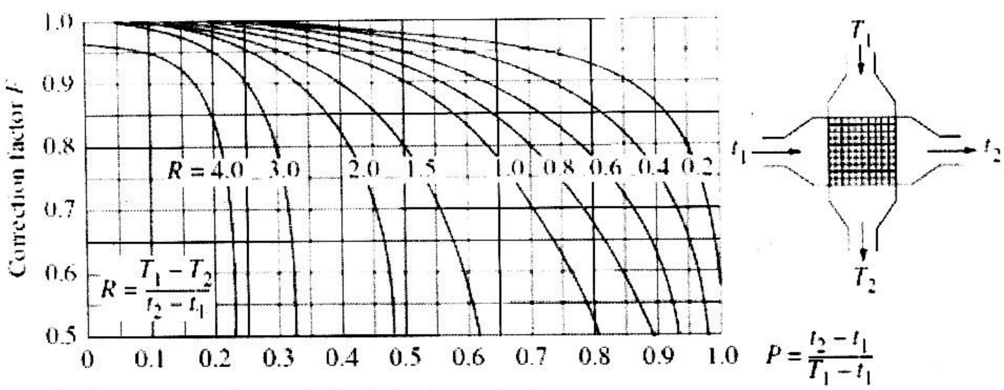
D_h = ϕ hydraulique des positions en ligne (pas carré)

$$D_h = \frac{4\left(P^2 - \frac{\pi d_e^2}{4}\right)}{\pi d_e} = \frac{4P^2}{\pi d_e} - d_e$$

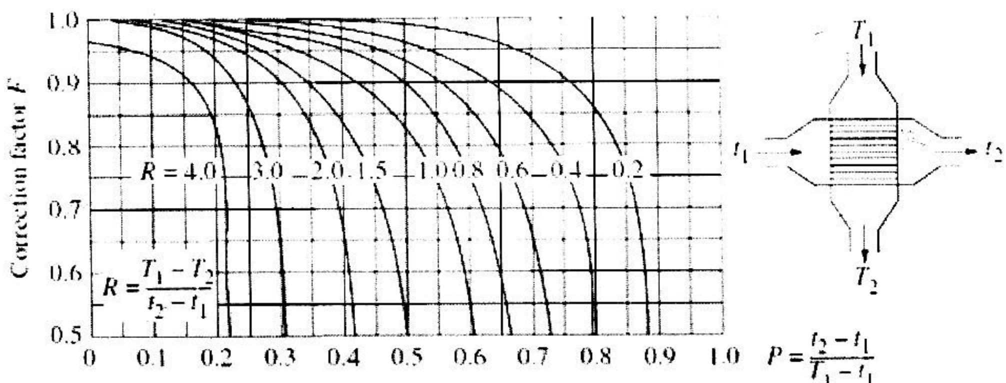


Pour d'autre configurations, voir références (handbook of heat transfer).

Facteur de correction pour échangeurs à courants croisés

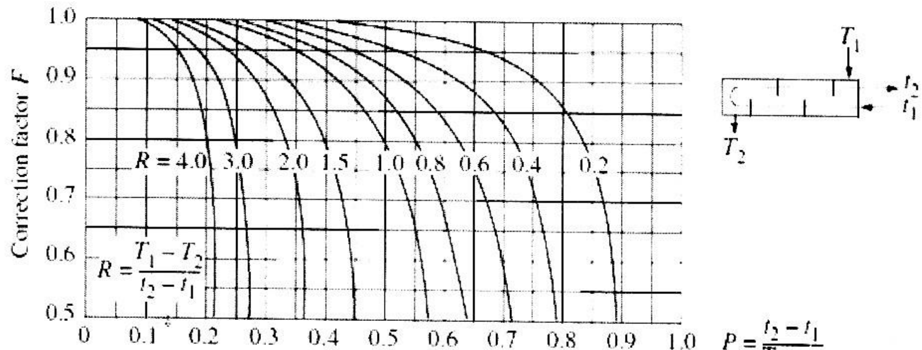


(c) Single-pass cross-flow with both fluids *unmixed*

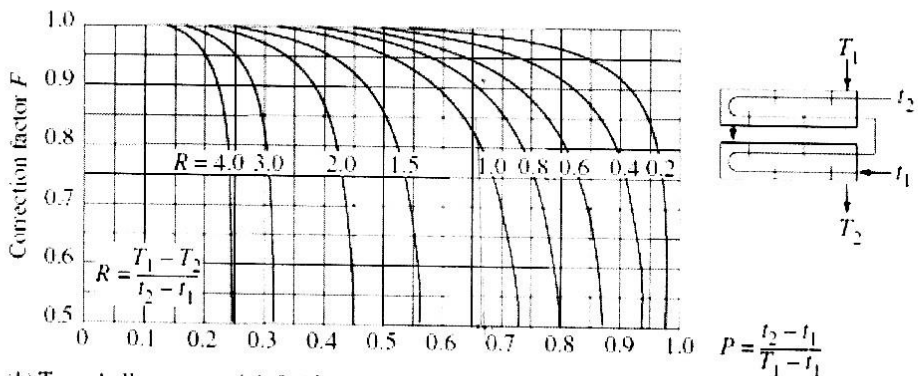


(d) Single-pass cross-flow with one fluid *mixed* and the other *unmixed*

Facteur de correction pour échangeurs à tubes et calandre



(*a*) One-shell pass and 2, 4, 6, etc. (any multiple of 2), tube passes



(*b*) Two-shell passes and 4, 8, 12, etc. (any multiple of 4), tube passes