TD N°5 Corrigé type

Exercice N°1

Hypothèses:

1. L'écoulement est permanent;
2. Le poids de l'eau et du coude sont négligeables;
3. L'eau est évacuée vers l'atmosphère, donc la pression manométrique est nulle;
4. L'écoulement est turbulent et complètement établi à l'entrée et à la sortie.

• Considérons le coude comme volume de contrôle (voir figure TD N°5), et 1 désigne l'entrée du coude et 2 la sortie.

• Ecrivons l'équation de continuité:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \; ; \text{ sachant que } \dot{m} = \rho . A . V$$

Calculons les vitesses à l'entrée et sortie du coude:

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} \; ; \quad A.N \quad V_1 = \frac{14}{(1000).(0{,}0113)} = 1{,}24 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{\dot{m}}{\rho . A_2} \; ; \quad A.N \quad V_2 = \frac{14}{(1000).(7.10^{-4})} = 20{,}0 \text{ m/s}$$

• Le théorème de la quantité de mouvement:

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par des fluides en mouvement sur les objets qui les environnent (voir cours MDF2):

$$\sum \vec{F} = \vec{F_S} + \vec{F_B} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\rho \, d\forall + \int_{CS} \vec{V}\rho \vec{V}.\vec{dA} \quad (1)$$

Où $\vec{F_S}$: force de surface ; $\vec{F_B}$: force de volume.

.../...

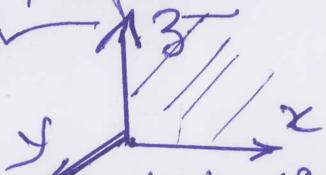
• D'après les hypothèses, l'équation (1) se réduit à :

$$\sum \vec{F} = \vec{F_B} + \vec{F_S} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\rho\, d\forall}}_{\text{Régime permanent.}} + \underbrace{\int_{CS} \vec{V}\rho\vec{V}.dA}_{\text{qté de mvt. à travers les surfaces de contrôle.}}$$

_ Bilan des forces : le poids de l'eau et du coude sont négligeables, il reste les forces de pression et la forces d'encrage (voir figure Ex. N°1)

$$\sum\vec{F} = \cancel{\vec{F_B}} + \vec{F_S} = \cancel{\vec{P}_{eau}} + \cancel{\vec{P}_{coude}} + \underbrace{\vec{F}_{R\,encr.} + \vec{F}_{S\,pression}}_{\vec{F_S}} =$$

$$\int_{CS}\vec{V}\rho\vec{V}dA = \dot m\vec{V_2} - \dot m\vec{V_1}$$



Dir. x : $F_{R\,enc.x} + P_{1\,rel.}A_1 = \dot m V_2\cos\theta - \dot m V_1$ (2)

Dir. z : $F_{R\,enc.z} = \dot m V_2 \sin\theta$ (3)

Pour calculer la force d'encrage $F_{R\,enc}$, il faut d'abord calculer la pression P_1, pour cela utilisons l'équation de Bernoulli. Cette dernière s'écrit en suivant une ligne de courant entre ① et ② :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$P_1 - P_2 = \rho g\left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{\rho g} + z_2 - z_1\right)$$

A.N $P_1 - P_{atm} = (1000).(9,81).\left(\frac{(20)^2 - (1,24)^2}{2(9,81)} + 0,3 - 0\right)$

$P_{1\,rel.} = 202,2\ kN/m^2 = 202,2\ kPa.$

..../....

Maintenant à partir de l'équation (2),
Calculons la force d'encrage F_{Rx} dans la dir. x :

$$F_{Rx} + P_1 A_1 = \dot{m} V_2 \cos\theta - \dot{m} V_1$$

$$F_{Rx} = \dot{m}(V_2 \cos\theta - V_1) - P_1 A_1$$

A.N $$F_{Rx} = (14)(20\cos 30° - 1,24) - (202.200).(0,0113)$$

$$F_{Rx} = -2053\ N$$

Ayant supposé que F_{Rx} était positive dans la direction, il s'est avéré le contraire. Donc elle est dirigée à l'opposé du sens positif de x.

Même chose pour F_{Rz} dans la direction z (éq. 3)

$$F_{Rz} = (14).(20 \sin 30°) = 144\ N.$$

Exercice N° 2

Les vitesses à l'entrée et à la sortie demeurent les mêmes, même chose pour la pression à l'entrée du coude, cependant la composante verticale de la force d'encrage à la connection du coude réduit est nulle dans ce cas là ($F_{Rz} = 0$). La composante horizontale de la force d'encrage est déterminée à partir de l'équation de la quantité de mouvement. Notons que la vitesse de sortie est négative, du moment qu'elle est dirigée dans la direction négative de la direction-x.

Le bilan des forces donne :

$$F_{Rencr.x} + P_{1rel}.A_1 = \dot{m}(-V_2) - \dot{m}V_1 = -\dot{m}(V_2 + V_1$$

... / ...

Maintenant calculons $F_{R\,encr.\,x}$ avec les mêmes donnés que precedemment :

$$F_{R\,encr.\,x} = -\dot{m}(V_2+V_1) + P_{1\,rel.}\,A_1$$

AN $$F_{R\,encr.\,x} = (14)(20+1{,}24) - (202.200)(0{,}0113)$$

$$F_{Rx} = -2591\ N$$

On observe que cette force agit dans la direction négative de x, (comme si le coude veut se séparer du tube). De là on peut imaginer la force de la bride avec boulons pour maintenir cette force de réacti

Exercice N°3

Hypothèses : 1. L'écoulement de l'eau à la sortie de la buse est stationnaire. 2. L'eau se projette dans touts les directions sur le plan de la plaque.

Ainsi, le jet d'eau est projetté dans toute l'atmosphère et occupe tout le volume de controle à la pression atmosphérique. Les forces verticales et les flux de quantités de mouvements ne sont pas considerés, du moment qu'ils n'ont aucun effet sur la force horizontale de réaction.

$$\sum \vec{F} = \vec{F_S} + \cancel{\vec{F_B}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho\, d\forall} + \int_{SC} \vec{V}\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F_R} = \dot{m}\vec{V_2} - \dot{m}\vec{V_1}$$

Notons que $V_{1,x} = V_1$, et $V_{2,x} = 0$

$$-F_{R,x} = -0 - \dot{m}V_1$$

... / ...

A.N $F_{R,x} = (10)\cdot(20) = 200\,N$

Le support doit appliquer une force de 200 N, dans la direction négative de x (opposé au jet d'eau).

Exercice N° 4

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\sum \vec{F} = \vec{F_B} + \vec{F_c} = \dot{m}\vec{V_2} - \dot{m}\vec{V_1}$$

Dir. x : $-F_{R,x} = \dot{m}_A (V_{2,x} - V_{1,x}) + \dot{m}_B (V_{2,x} - V_{1,x})$

$Q_v = A.V = (0{,}15)\cdot(45) = 6{,}75\ ft^3/s$ (U.A)

$Q_A = 6{,}75/3 = 2{,}25\ ft^3/s$; $Q_B = 6{,}75 - 2{,}25 = 4{,}50\ ft^3/s$

Dir y : $F_{R,y} = \dot{m}_A (V_{2,y} - V_{1,y}) + \dot{m}_B (V_{2,y} - V_{1,y})$

A.N $F_{R,x} = 491$ (U.A) lb

$F_{R,y} = 170$ (U.A) lb

$F_{R,result} = 520$ (U.A) lb ; $tg\alpha = \frac{170}{491} = 0{,}34623$

$\alpha = 19{,}1°$