

Corrigé 01 (10 points)

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ -3 \leq y \leq -2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 2 \leq -y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{-1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x}{3} \leq \frac{-x}{y} \leq \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{-x}{y} \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ -\frac{3}{2} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} \in \left[\frac{-3}{2}, \frac{-1}{3} \right] \end{aligned}$$

1 $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 1 + \sqrt{2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

2 Par récurrence

Pour $n = 0$, on trouve $0 \leq v_0 - 1 = 0 \leq \sqrt{2}$, donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$

On suppose que l'inégalité est vraie pour un certain rang n (n'importe lequel) et on montre que l'inégalité est vraie pour le rang juste après c'est-à-dire pour le rang $n + 1$.

$$1 \leq v_n \leq 1 + \sqrt{2} \Rightarrow 2 \leq 2v_n \leq 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 3 \leq 1 + 2v_n \leq 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} \leq v_{n+1} \leq \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq v_{n+1} - 1 \leq \sqrt{2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq v_n - 1 \leq \sqrt{2}$

3

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{(v_{n+1} - v_n)(v_{n+1} + v_n)}{v_{n+1} + v_n} = \frac{v_{n+1}^2 - v_n^2}{v_{n+1} + v_n} = \frac{1 + 2v_n - v_n^2}{v_{n+1} + v_n} \\ &= \frac{-2 - 2v_n + v_n^2 + 1}{v_{n+1} + v_n} = \frac{(v_n - 1)^2 - 2}{v_{n+1} + v_n} \\ &= \frac{(v_n - 1 - \sqrt{2})(v_n - 1 + \sqrt{2})}{v_{n+1} + v_n} \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{cases} v_n \geq 1 \\ v_n \leq 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_n + v_{n+1} > 0 \\ v_n - 1 - \sqrt{2} \leq 0 \\ v_n - 1 + \sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{(v_n - 1 - \sqrt{2})(v_n - 1 + \sqrt{2})}{v_{n+1} + v_n} \geq 0$$

Donc v_n est croissante. Comme la suite v_n est croissante et majorée alors elle est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \ell$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} &= \sqrt{1 + 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n} \Rightarrow \ell^2 - 2\ell - 1 = 0 \Rightarrow (\ell - 1 - \sqrt{2})(\ell - 1 + \sqrt{2}) = 0 \\ &\Rightarrow \ell = 1 + \sqrt{2} \quad \vee \quad \ell = 1 - \sqrt{2} \text{ et comme } 1 - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow \ell = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Corrigé 02 (07 points)

1 On cherche $\delta > 0$, tq :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - 2| < \delta \implies |3x + 1 - 7| < \epsilon)$$

à cet effet, on utilise ce brouillon :

$$\begin{aligned} |3x + 1 - 7| < \epsilon &= |3x - 6| < \epsilon \\ &\implies 3|x - 2| < \epsilon \\ &\implies |x - 2| < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{3}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 2| < \delta &\implies |x - 2| < \frac{\epsilon}{3} \\ &\implies 3|x - 2| < \epsilon \\ &\implies |3x - 6| < \epsilon \\ &\implies |3x + 1 - 7| < \epsilon \end{aligned}$$

2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \geq 1 \\ ax^3 + bx + 2, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Il est clair que $f(1) = 2$ et $x^2 + 1$ est dérivable sur $]1, +\infty[$, avec $(1 + x^2)' = 2x$

(a) Le même sur $] - \infty, 1[$ et $(ax^3 + bx + 2)' = 3ax^2 + b$

(b) Il reste le point $a = 1$, pour ce point il faut calculer la dérivée à droite et à gauche car la fonction f est changer sa forme en 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

D'autre part puisque f est continue au point $a = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b + 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^3 + bx + 2 - (a + b + 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x^3 - 1) + b(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} + \frac{b(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} a(x^2 + x + 1) + b \\ &= 3a + b \end{aligned}$$

D'après ce qui précède on trouve

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ a + b + 2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} b = -a \\ 2a = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Corrigé 03 (03 points)

En appliquant le théorème TAF sur l'intervalle $[0, x]$, $x > 0$ avec la fonction e^t . Il est clair que e^t est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, d'où l'existence de $0 < c < x$ tq :

$$\begin{aligned} e^x - e^0 &= xe^c \\ \text{et comme } 0 < c < x &\implies e^0 < e^c < e^x \implies 1 < e^c < e^x \implies x < xe^c < xe^x \\ \text{ce qui implique que} & \\ e^x - 1 &> x \implies e^x > x + 1 \end{aligned}$$