Solutions TD 1 Physique des composants semi-conducteurs 3

Exercice 1

Calculer la longueur d'onde dans les cas suivants :

1.1. Cas du proton accéléré dans le vide

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{mv} \\ eU &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}} = \frac{6{,}62\ 10^{-34}}{\sqrt{2\ .\ 1{,}6\ 10^{-19}.\ 500.1{,}67\ 10^{-27}}} = 1{,}28\ pm$$

1.2. Cas de l'électron accéléré dans le vide

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{mv} \\ eU &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}} = \frac{6{,}62\ 10^{-34}}{\sqrt{2\ .\ 1{,}6\ 10^{-19}.\ 10^5.\ 9{,}1\ 10^{-31}}} = 3{,}38\ pm$$

1.3. Cas d'une balle de fusil

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}62\ 10^{-34}}{5\ 10^{-3}\ 2\ 10^2} = 6{,}62\ 10^{-34} m$$

1.4. Commenter les résultats

A l'échelle microscopique (cas de l'électron et du proton), les longueurs d'onde sont de l'ordre des distances à l'échelle atomique, donc il y a possibilité de voir les propriétés ondulatoires.

A l'échelle macroscopique (cas de la balle de fusil), la longueur d'onde est extrêmement faible, donc les phénomènes ondulatoires n'ont pas de sens physique.

Exercice 2

Calculer l'incertitude dans les cas suivants :

2.1. Cas d'un avion

$$\Delta x\ .\ \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \Longrightarrow \Delta x\ . \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\hbar}{2m\Delta v}$$

$$\Delta x\ . \geq \frac{1{,}05\ 10^{-34}}{2\ \ .\ \ 2\ 10^5\ \frac{10^3}{3600}} = 0{,}75\ 10^{-39}\ m$$

2.2 Cas d'un électron

$$\Delta x\ . \geq \frac{\hbar}{2m\Delta v}$$

$$\Delta x \,.\geq \frac{1{,}05\ 10^{-34}}{2\ .\ 9.1\ 10^{-31}\ 3{,}86\ 10^{6}} = 0{,}15\ 10^{-10}\ m = 0.15\ \text{Å}$$

2.3. Commenter les résultats

A l'échelle macroscopique, l'incertitude est trop faible, donc insignifiante et nous n'en tiendrons pas compte.
A l'échelle microscopique, l'incertitude est considérable, donc il faut en tenir compte.

Exercice 3

3.1. Equation de Schrödinger

$$\begin{cases} H\psi = E\psi \\ H = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta + V \\ V = 0, \quad car\ l'électron\ est\ libre \\ \Delta = \dfrac{d^2}{dx^2}, \quad problème\ à\ une\ dimension \end{cases}$$

Par conséquent, l'équation de Schrödinger $H\psi = E\psi$ s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \Longrightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad (1)$$

3.2. Forme de la fonction d'onde

En posant $\quad \dfrac{2mE}{\hbar^2} = k^2 \qquad (2)$

L'équation (1) devient :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$$

Dont la solution est de la forme :

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Comme l'électron se déplace selon l'axe x'x, il n'y a pas d'onde réfléchie, par conséquent :

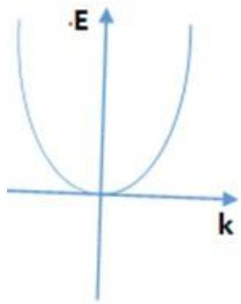
$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

Qui est une onde progressive.

3.3. Relation de dispersion

De l'expression (2), on a :

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$



3.4.) Commenter les résultats

La relation de dispersion est une parabole.

Le spectre est **continu**.

3.5. Equation de Schrödinger

D'après ce qu'on vient de voir dans l'exercice (1), on a :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \qquad (1)$$

3.6. Fonction d'onde et niveaux d'énergie

Pour la fonction d'onde :

La solution de (1) est de la forme (Dans ce cas, l'électron est confiné dans le puits. Par conséquent, on doit garder l'onde réfléchie):

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad (2)$$

En appliquant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \Longrightarrow A + B = 0 \Longrightarrow A = -B \\ \psi(a) = 0 \Longrightarrow A\left(e^{ika} - e^{-ika}\right) = 0 \Longrightarrow A.\sin(ka) = 0 \end{cases}$$

$$A \neq 0 \Longrightarrow ka = n\pi \; avec \; n \in N^*$$

$$\psi(x) = A\left(e^{ikx} - Be^{-ikx}\right) = C\,.\sin(kx)$$

$$\psi(x) = C\,.\sin(kx) = C\,.\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Pour l'énergie

$$k = \frac{n\pi}{a} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \Longrightarrow E = n^2\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Longrightarrow E = n^2\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

L'énergie est quantifiée, car elle dépend du nombre quantique n. Par conséquent, **le spectre est discret (quantifié).**

3.7) A partir de la condition de normalisation, déterminer la constante d'intégration.

A partir de la condition de normalisation :

$$\int_0^a \psi(x).\psi(x)^* dx = 1 \Longrightarrow \int_0^a C^2\sin^2.\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = c^2\int_0^a \left(\frac{1-cos\,2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}{2}\right) dx{=}1$$

$$\frac{1}{2}c^2\int_0^a\left(1-\cos 2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)dx=\frac{1}{2}c^2\int_0^a dx-\frac{1}{2}c^2\underbrace{\int_0^a \cos 2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx}_{=0}=\frac{1}{2}c^2a=1$$

$$\frac{1}{2}c^2a=1\Longrightarrow c=\sqrt{\frac{2}{a}}\quad\Longrightarrow \boldsymbol{\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\,.\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

3.8) Calculer la valeur moyenne de sa position et de son impulsion

La valeur moyenne de la position

$$\langle x\rangle=\langle\psi|x|\psi\rangle=\int_0^a\psi^*(x)\,x\,\psi(x)dx=\frac{2}{a}\int_0^a x\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)dx=\frac{2}{a}\frac{a^2}{4}=\frac{a}{2}$$

$$\boldsymbol{\langle x\rangle=\frac{a}{2}}$$

La valeur moyenne de l'impulsion

$$\langle P_x\rangle=\langle\psi|P_x|\psi\rangle=\int_0^a\psi^*(x)P_x\psi(x)dx=\frac{2}{a}\int_0^a\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\right)dx=0$$

$$\boldsymbol{\langle P_x\rangle=0}$$

Exercice 4

4.1. Calcul du commutateur $[\hat{x},\hat{p}_x]$

$$[\hat{x},\hat{p}_x]\psi=\hat{x}\hat{p}_x\psi-\hat{p}_x\hat{x}\psi=x\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{dx}-\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(x\psi)=x\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{dx}-\frac{\hbar}{i}\psi-x\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{dx}=-\frac{\hbar}{i}\psi$$

Par conséquent, le commutateur :

$$[\hat{x},\hat{p}_x]=-\frac{\hbar}{i}=i\hbar\neq 0$$

4.2. Mesure simultanée de x et p_x

Le commutateur $[\hat{x},\hat{p}_x]\neq 0$, il n'est pas possible de mesurer simultanément les deux grandeurs x et p_x.