Correction TD N°3

Exo.1 :

1.1. Equation de Schrödinger dans les régions I, II et III

- **Régions I et III**

Dans ces deux régions, l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi = 0$$

Avec: $\frac{2mE}{\hbar^2} = \alpha^2$

- **Dans la région II**

Dans ces deux régions, l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m\,(V-E)}{\hbar^2}\psi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\beta^2\psi = 0$$

Avec: $\frac{2m(V-E)}{\hbar^2} = \beta^2$

1.2. Forme des solutions

Région I : $\psi_I(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}$

Région II : $\psi_{II}(x) = Ce^{\beta x} + De^{-\beta x}$

Région III : $\psi_{III}(x) = Fe^{i\alpha x}$

1.3. Conditions aux limites

$$\psi_I(O) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A + B = C + D \qquad (1)$$

$$\psi_{II}(L) = \psi_{III}(L) \Rightarrow Ce^{\beta L} + De^{-\beta L} = Fe^{-i\alpha L} \qquad (2)$$

$$\psi_I'(O) = \psi_{II}'(O) \Rightarrow i\alpha A - i\alpha B = \beta C - \beta D \qquad (3)$$

$$\psi_{II}'(L) = \psi_{III}'(L) \Rightarrow C\beta e^{\beta L} - D\beta e^{-\beta L} = i\alpha Fe^{-i\alpha L} \qquad (4)$$

1.4. Coefficient de transmission

A partir du système d'équations (1) – (4), on aboutit à :

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{V^2 Sh^2\left[\frac{\sqrt{2m\,L^2(V_0-E)}}{\hbar}\right]}{4E(V_0-E)}}$$

1.5. Variation de T(L)

Si $L \nearrow \Longrightarrow \; V^2 Sh^2\left[\frac{\sqrt{2m\,L^2(V_0-E)}}{\hbar}\right] \nearrow$ $\;donc\; \left\{1+\frac{V^2 Sh^2\left[\frac{\sqrt{2m\,L^2(V_0-E)}}{\hbar}\right]}{4E(V_0-E)}\right\} \nearrow$

Par conséquent : $T=\frac{|F|^2}{|A|^2}=\frac{1}{1+\frac{V^2 Sh^2\left[\frac{\sqrt{2m\,L^2(V_0-E)}}{\hbar}\right]}{4E(V_0-E)}} \searrow$

Conclusion : Le coefficient de transmission diminue lorsque la largeur de la barrière augmente.

Exo.2 :

2.1. Calcul du coefficient de transmission

$$T(E)=exp\left[\frac{-4\sqrt{2m^*}}{3e\,E_b\hbar}(V_0-E)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$T(0)|_{V_0=0.5eV}=4.88\;10^{-4}$$

$$T(0)|_{V_0=0.2eV}=0.145$$

2.2. Commentaire

L'augmentation de la hauteur de la barrière diminue le coefficient de transmission à travers la barrière.

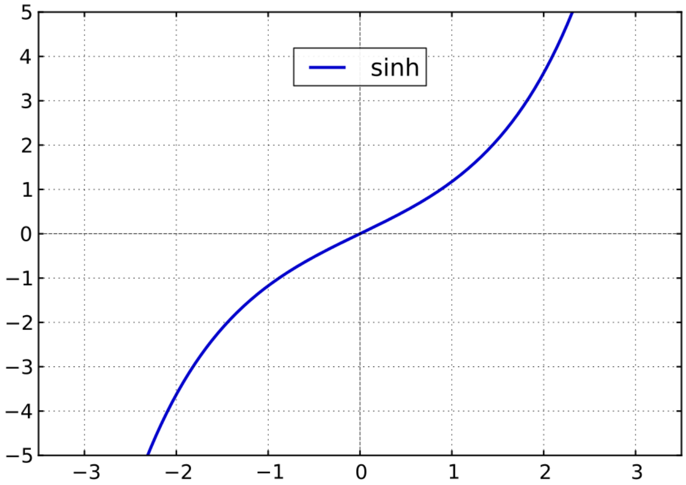
Conclusion

Des deux exercices précédents, on peut conclure qu'une transmission à travers une barrière s'affaiblit si sa hauteur ou sa portée est grande, ou si les deux sont grandes en même temps.

Rappel: Fonctions hyperboliques

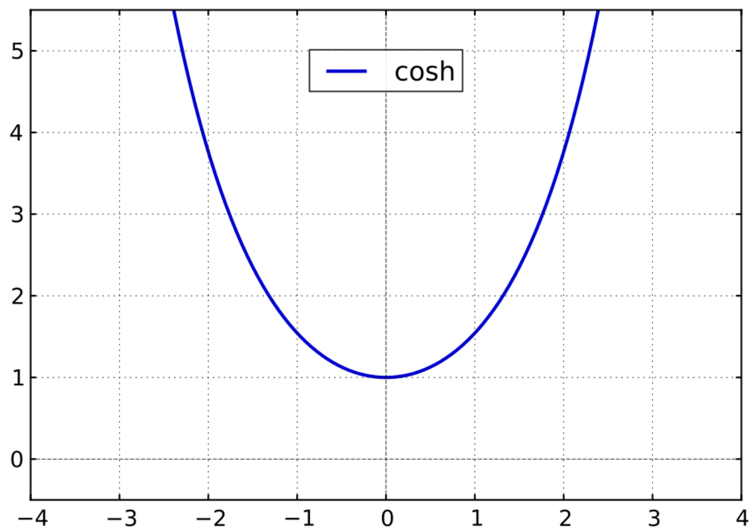
1) Sinus hyperbolique

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



2) Cosinus hyperbolique

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



3) Tangente hyperbolique

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$