Département de
GENIE MECANIQUE

UNIVERSITE BATNA 2
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Résumé- Support de cours

Modélisation et simulation des matériaux

Spécialité : Master 1 - Génie des matériaux

Dr A. BENHIZIA

I. Rappels de calcul matriciel

II.E. Inversion des matrices carrées

Une matrice carrée **A** est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice carrée $\mathbf{A}^{-1}$ (appelée *matrice inverse*) telle que :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, la matrice **A** est dite *singulière*

Propriétés :

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (Attention au changement d'ordre !)
- $[\mathrm{diag}(D_{ii})]^{-1} = \mathrm{diag}(1/D_{ii})$
- La matrice **A** est dite *orthogonale* si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$

Inverse d'une matrice (méthode des cofacteurs)

Soit A une matrice carré n x n de déterminant non nulle :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{t}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ou les coefficients A_{ij} sont les **déterminants** des comatrices associées à A multipliés par $(-1)^{i+j}$:

Exemple de calcul d'inverse d'une matrice 3 x 3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 32$$

$$A^{-1} = \frac{1}{32} \, {}^{t}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{32} \, {}^{t}\begin{pmatrix} -4 & -16 & 12 \\ 20 & 0 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -4 & 20 & -4 \\ -16 & 0 & 8 \\ 12 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}$$

III. Application aux systèmes d'équations linéaires

Un système de n équations linéaires à n inconnues est de la forme :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

où les a_{ij} sont les coefficients du système, les x_i les inconnues et les b_i les termes constants.
Un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

avec :

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

III. I. Méthodes directes de résolution du système linéaire Ax = b

Dans ce chapitre, on étudie quelques méthodes directes permettant de résoudre le système :

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\,(\mathbf{1})$$

Une méthode directe est une méthode qui permet de résoudre le système (1) en un nombre fini d'opérations et en arithmétique exacte. Dans ce chapitre, on présente les méthodes suivantes :

– Méthode de Cramer.

– Méthode d'élimination de Gauss.

1-Méthode de Cramer

Le théorème affirme que le système admet une unique solution si et seulement si sa matrice **A** est inversible (déterminant non nul), et cette solution est alors donnée par :

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

où A_k est la matrice carrée formée en remplaçant la k-ième colonne de A par le vecteur colonne b.

Exemple:

Soit le système d'équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

où $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$x_1 = \frac{\det \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad x_2 = \frac{\det \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad x_3 = \frac{\det \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

2 Méthode d'élimination de Gauss

L'idée de cette méthode est de se ramener à un système linéaire dont la matrice est triangulaire supérieure, on obtient ensuite la solution par simple remontée.

Etant donné le système d'équations linéaires :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = & b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = & b_2 & (\mathrm{L}_2) \\ \ldots & & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = & b_n & (\mathrm{L}_n) \end{array}\right.$$

La méthode du pivot de Gauss, consiste à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes Li

, à se ramener à un **système triangulaire** (ou système échelonné) de la forme
:

$$(S)\left\{\begin{array}{llllcll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ & \alpha_{22}x_2 & +\ldots & +\alpha_{2p}x_p & = & \beta_2 & (\mathrm{L'}_2) \\ \ldots & & & & & & \\ & & & \alpha_{np}x_p & = & \beta_n & (\mathrm{L'}_n) \end{array}\right.$$

La dernière équation $\mathrm{L'}_n$ donne la valeur de x_n , puis x_{n-1} dans $\mathrm{L'}_{n-1}$

après report de x_n dans cette ligne et ainsi de suite jusqu'à la valeur x_1 dans L_1

Exemple

Résolution du système :

$$(S)\quad \begin{cases} x + 3y + 4z & = & 50 & (L_1) \\ 3x + 5y - 4z & = & 2 & (L_2) \\ 4x + 7y - 2z & = & 31 & (L_3) \end{cases}$$

Elimination de x dans L_2 et L_3

$$(S)\quad \begin{cases} x + 3y + 4z & = & 50 & (L_1) \\ y + 4z & = & 37 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ 5y + 18z & = & 169 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 4(L_1) \end{cases}$$

Elimination de y dans L3

$$(S)\quad \begin{cases} x + 3y + 4z & = & 50 & (L_1) \\ y + 4z & = & 37 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ 2z & = & 16 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 5(L_2) \end{cases}$$

d'où de (L_3) : $z = +8$

puis de $(L_2) y = 37 - 4z = 5$

et enfin de (L_1) : $x = 50 - 3y - 4z = 3$

Les solutions de (S) sont donc : $x = 3$; $y = 5$; $z = 8$.

3. La méthode des résidus pondérés

❖ Cas 1D

La méthode des résidus pondérés est une technique d'approximation de la solution de problèmes aux frontières utilisant des fonctions test satisfaisant les conditions aux limites imposées et une formulation intégrale pour minimiser l'erreur **dans un sens moyen** sur le domaine de définition du problème.

Nous allons décrire en premier lieu le concept de base pour le cas unidimensionnel (1D). Pour une équation différentielle de forme générale:

$$D[y(x), x] = 0 \qquad a < x < b$$

Et comme conditions aux limites:

$$y(a) = y(b) = 0$$

La méthode des résidus pondérés recherche une approximation de la solution de forme:

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i N_i(x)$$

Fonctions tests

Paramètres inconnus

Approximation de la solution

Après substitution de la solution proposée dans l'équation différentielle, parait une erreur résiduelle.

$$R(x) = D[y^*(x), x] \neq 0$$

Résidu

Notons que le résidu ***R(x)*** et aussi fonction des paramètre inconnus $\boldsymbol{C_i}$ de telle sorte que:

$$\int_a^b w_i(x) R(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad i = 1, n$$

« n » équations algébriques

$w_i(x)$: Représente « n » fonctions poids arbitraires.

Plusieurs variantes de la méthode des résidus pondérés existent et les techniques varient principalement dans la manière dont les fonctions poids -ou de pondération- sont déterminées ou sélectionnées. Les techniques les plus courantes sont:
colocation par point, colocation par sous-domaine, moindres carrés, et de Galerkin.

Dans la méthode de Galerkin, les fonctions de pondération sont choisis pour être identique aux fonctions d'essai –ou test-.

$$w_i(x) = N_i(x) \qquad i = 1, n$$

Par conséquent, les paramètres inconnus sont déterminés par:

$$\int_a^b w_i(x) R(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b N_i(x) R(x) = 0 \qquad i = 1, n$$

Nous obtenons « n » équations algébriques pour l'évaluation des paramètres inconnus.

❑ Exemple 1:

Utilisez la méthode de Galerkin pour obtenir une solution approchée de l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10x^2 = 5 \qquad 0 \le x \le 1$$

Avec les conditions aux limites: $y(0) = y(1) = 0.$

❑ Solution:

En utilisant une seule fonction d'essai, la forme la plus simple satisfaisant les conditions aux limites est: $N_1(x) = x(x-1)$

$$y^*(x) = c_1 x(x-1)$$

$$\frac{dy^*}{dx} = c_1(2x-1)$$

$$\frac{d^2y^*}{dx^2} = 2c_1$$

On peut écrire donc que: $$\int_0^1 x(x-1)(2c_1 - 10x^2 - 5)\,\mathrm{d}x = 0$$

Ce qui conduit après intégration à: $$c_1 = 4$$

Pour ce problème relativement simple, on pourrait obtenir la solution exacte suivante: $$y(x) = \frac{5}{6}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{10}{3}x$$

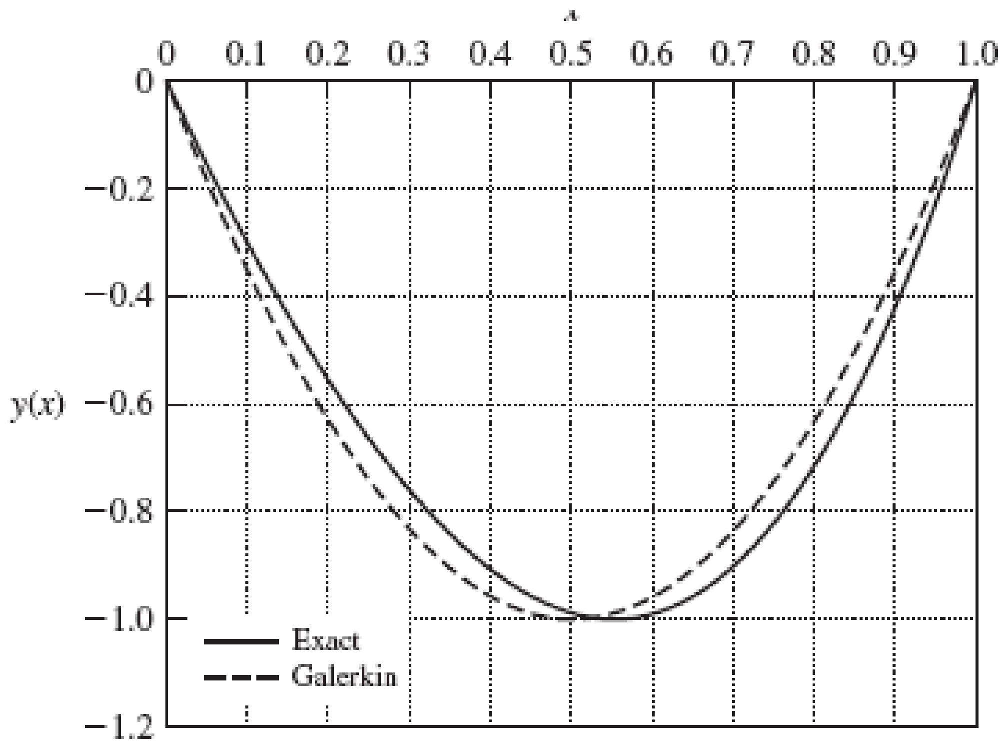

Figure 4. Comparaison des deux solutions exacte et approchée

On utilisant les deux fonctions d'essai suivantes:

$$N_1(x) = x(x-1) \qquad N_2(x) = x^2(x-1)$$

On trouve comme solution approchée:

$$y^* = \frac{19}{6}x(x-1) + \frac{5}{3}x^2(x-1) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{19}{6}x$$

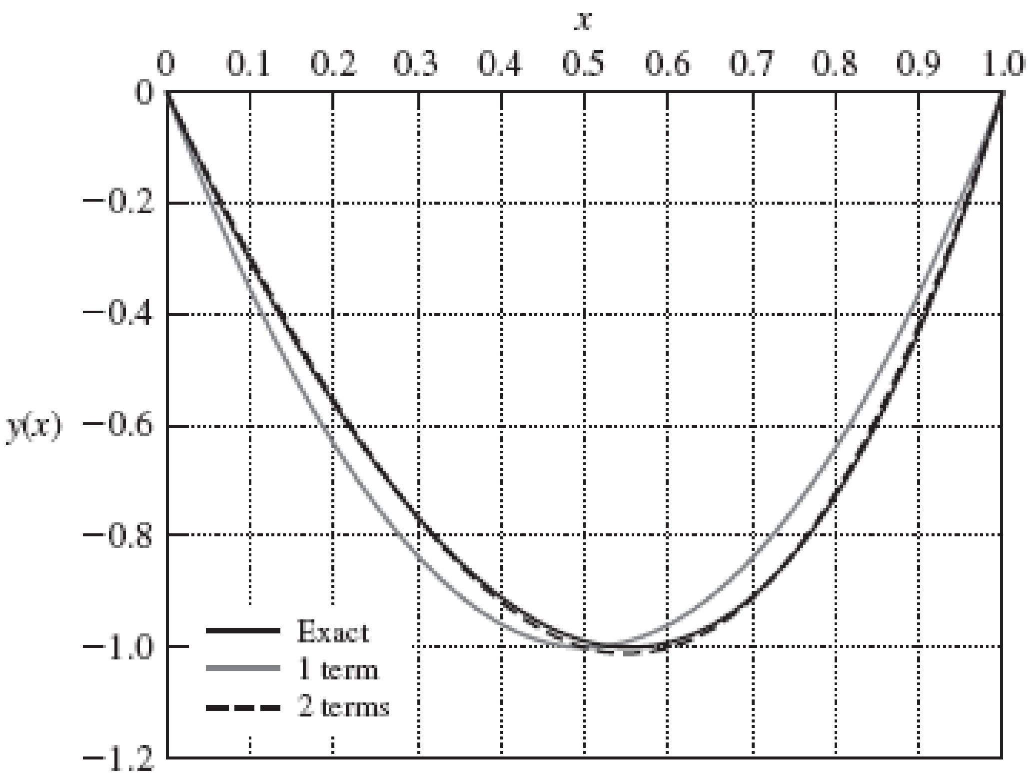

Figure 5. Comparaison des solutions exacte, approchée à une fonction d'essai et à deux fonctions d'essai