



UNIVERSITE BATNA 2
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Support de cours

Mécanique des milieux continus

Spécialité : L3- Génie des matériaux

Dr A. BENHIZIA

I. Rappels de calcul matriciel

I. Définitions

Une matrice $n \times m$ est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes :

Exemple avec $n = 2$, $m = 3$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

n et m sont les dimensions de la matrice.

Une matrice est symbolisée par une lettre en caractères gras, par exemple \mathbf{A} . On note A_{ij} l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (la ligne est toujours nommée en premier).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

On note $[A_{ij}]$ la matrice d'élément général A_{ij} .

On a donc : $\mathbf{A} = [A_{ij}]$

Si $m = 1$, la matrice est appelée *vecteur* (plus précisément *vecteur-colonne*) :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si $n = m$, la matrice est appelée *matrice carrée*.

Une matrice carrée \mathbf{A} est dite *symétrique* si :

$$A_{ji} = A_{ij}$$

pour tout i différent de j

Quelques matrices carrées particulières (Exemples avec $n = 4$)

Matrice unité

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parfois notée \mathbf{I}_n
 n est la dimension de la
matrice
(soit \mathbf{I}_4 dans cet exemple)

Matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix}$$

notée $\text{diag}(D_{ii})$

Matrice triangulaire supérieure
(Upper triangular matrix, \mathbf{U})

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure
(Lower triangular matrix, \mathbf{L})

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

II. Opérations sur les matrices

II.A. Addition, soustraction

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

II.B. Multiplication par un nombre

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

II.C. Transposition

La transposée \mathbf{A}^T (aussi notée \mathbf{A}') d'une matrice \mathbf{A} est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

II.D. Multiplication des matrices

Définissons tout d'abord le produit d'un vecteur-ligne \mathbf{x}^T par un vecteur-colonne \mathbf{y} :

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Ce produit est appelé *produit scalaire* des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} , noté $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Les vecteurs doivent avoir la même dimension.

Le produit matriciel s'en déduit : le produit de la matrice \mathbf{A} ($n \times m$) par la matrice \mathbf{B} ($m \times p$) est la matrice \mathbf{C} ($n \times p$) telle que l'élément C_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice \mathbf{A} par la colonne j de la matrice \mathbf{B} .

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj} \quad i = 1..n \quad j = 1..p$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$$

On a en effet, en effectuant les produits ligne par colonne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 = 9 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 4 = 7$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \times 5 + 3 \times 2 - 1 \times 3 = 23 \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \times 1 + 3 \times 3 - 1 \times 4 = 9$$

II.E. Déterminant d'une matrice carrée

Pour une matrice 2×2 , on montre que la matrice inverse est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Le nombre $ad - bc$ est appelé *déterminant* de la matrice \mathbf{A} , noté :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A})$$

- La matrice inverse \mathbf{A}^{-1} n'existe donc que si $\det \mathbf{A}$ est différent de zéro.
- La matrice \mathbf{A} est singulière si $\det \mathbf{A} = 0$, régulière dans le cas contraire. Ce résultat se généralise à une matrice de dimension quelconque.

Propriétés des déterminants :

- $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B})$
- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier, $\det(\mathbf{I}) = 1$ (si \mathbf{I} est la matrice unité)
- Si \mathbf{A} est régulière, $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A})$

$$\text{puisque } \det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I}) = 1$$

- Si \mathbf{A} est orthogonale, $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$

$$\text{puisque } \det(\mathbf{AA}^T) = [\det(\mathbf{A})]^2 = \det(\mathbf{I}) = 1$$

Propriétés :

- Le produit matriciel est :
- *associatif* : $\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- *distributif par rapport à l'addition* : $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- *non commutatif* : \mathbf{AB} n'est pas égal à \mathbf{BA} en général.

- La matrice unité \mathbf{I} est *élément neutre* pour la multiplication : $\mathbf{AI}_m = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$, si la matrice \mathbf{A} est de dimensions $n \times m$.

- Transposée d'un produit : $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (Attention au changement d'ordre !).

II.F. Inversion des matrices carrées

Une matrice carrée \mathbf{A} est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice carrée \mathbf{A}^{-1} (appelée *matrice inverse*) telle que :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Si \mathbf{A}^{-1} n'existe pas, la matrice \mathbf{A} est dite *singulière*

Propriétés :

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (Attention au changement d'ordre !)
- $[\text{diag}(\mathbf{D}_{ii})]^{-1} = \text{diag}(1/\mathbf{D}_{ii})$
- La matrice \mathbf{A} est dite *orthogonale* si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Inverse d'une matrice (méthode des cofacteurs)

Soit A une matrice carré n x n de déterminant non nulle :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ou les coefficients A_{ij} sont les **déterminants** des comatrices associées à A multipliés par $(-1)^{i+j}$:

Exemple de calcul d'inverse d'une matrice 3 x 3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 32$$

$$A^{-1} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{32} \begin{pmatrix} -4 & -16 & 12 \\ 20 & 0 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -4 & 20 & -4 \\ -16 & 0 & 8 \\ 12 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}$$

III. Transformation linéaire

Une transformation linéaire est une transformation dans laquelle chaque nouvelle variable est une combinaison linéaire d'anciennes variables. En 2D :

$$x' = ax + by \quad ; \quad y' = cx + dy$$

avec a, b, c et d sont des constantes.

Du point de vue vectorielle :

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ V' \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ M \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ V \end{matrix}$$

où

$$V' = MV \dots\dots\dots(1)$$

M est la matrice de la transformation

a. Valeurs propres et vecteurs propres

Si on veut s'intéresser aux vecteurs qui ne subissent pas de rotation avec la transformation alors on cherche V' qui restent parallèles à V :

$$V' // V \Leftrightarrow V' = \lambda V \dots\dots\dots(2)$$

λ est une constante scalaire.

En utilisant la transformation :

$$MV = \lambda V$$

ce qui donne

$$(M - \lambda I)V = 0$$

- λ est dite **valeur propre** de la matrice M s'il existe un vecteur non nul V tel que

$$\boxed{MV = \lambda V}$$

- Le vecteur V est alors appelé **vecteur propre** de M associé à la valeur propre λ

- Détermination des valeurs propres

Les valeurs propre d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique.

b. Polynôme caractéristique

Le polynome caractéristique de la matrice M est calculé comme le déterminant de $(M - \lambda I_n)$

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } M \iff \det(M - \lambda I_n) = 0.$$

(I_n est la matrice identité de taille $n \times n$)

Les vecteurs propres sont les vecteurs dont la direction reste inchangée après multiplication par la matrice.

$$(M - \lambda I)V = 0$$

Exemple 1

Trouver les valeurs et vecteurs propres de la matrice M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

c. Diagonalisation d'une matrice

La diagonalisation d'une matrice M consiste à l'écrire dans une base où ses éléments hors de la diagonale sont nuls. Cette transformation est utilisée en algèbre linéaire afin de pouvoir ensuite réaliser des calculs plus facilement.

Une matrice est diagonalisable si il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que :

$$D = P^{-1}MP$$

- Méthode pour diagonaliser

Soit M une matrice carrée $n \times n$. Pour essayer de la diagonaliser :

1. On calcule d'abord son polynôme caractéristique .
2. On cherche les racines du polynôme : ce sont les valeurs propres de M .

On suppose ici que l'on a trouvé n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

3. Pour chaque valeur propre λ_i de M , on cherche un vecteur propre X_i .
4. Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les (X_1, \dots, X_n) . Alors $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

Diagonaliser les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE II : ANALYSES DES CONTRAINTES

Présentation

La **théorie de l'élasticité** étudie les **déplacements**, les **déformations** et les **contraintes** dans un solide soumis à des forces extérieures.

Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Le **matériau** est **homogène** (il a les mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions).
- Le comportement du matériau est **linéaire** (les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires) et **élastique** (le solide reprend sa forme initiale dès que les forces appliquées sont supprimées).

Le repère $\{O; x, y, z\}$ est un repère orthonormé direct ; \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont les vecteurs unitaires des axes (figure 1).

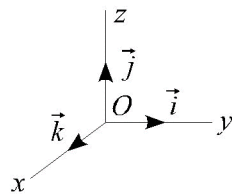


Figure 1 - Repère orthonormé $\{O; x, y, z\}$ et vecteurs unitaires $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

1 Contraintes autour d'un point

1.1 Coupure, facette et vecteur contrainte

En chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une **coupure** du solide, par une surface S , en deux parties A et B (figure 2).

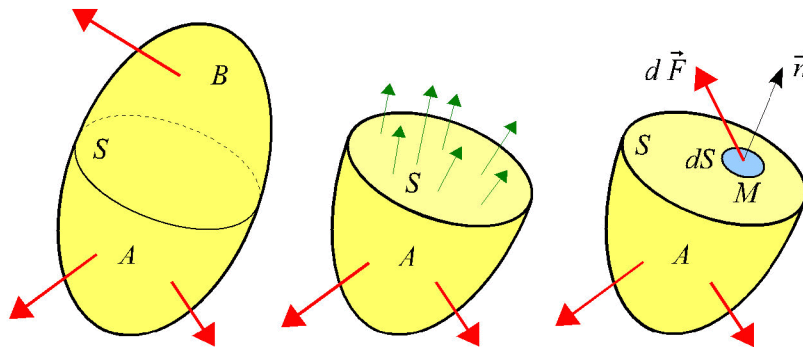


Figure 2 - Coupure et facette \vec{n} en M

La partie A , par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point M de S . Soit dS un élément infinitésimal de la surface S entourant M et \vec{n} le vecteur unitaire, perpendiculaire en M à S et dirigé vers l'extérieur de la partie A . Nous appellerons cet ensemble **facette** \vec{n} en M .

Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle **vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M** , la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (1.1)$$

Remarque : une contrainte s'exprime en pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$); dans la pratique, on utilise souvent le mégapascal ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2$)

Considérons, en un point M , le cylindre infiniment petit d'axe \vec{n} , de hauteur h et de section dS (figure 3).

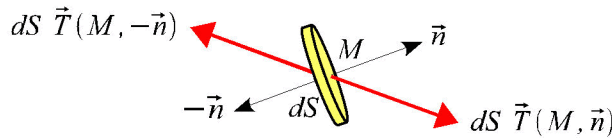


Figure 3 - Efforts sur les facettes \vec{n} et $-\vec{n}$

Quand h tend vers 0, le cylindre est en équilibre sous l'action des forces $dS \vec{T}(M, \vec{n})$ et $dS \vec{T}(M, -\vec{n})$ d'où :

$$\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$

1.2 Contrainte normale et contrainte tangentielle

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant \vec{n} et sa projection sur la facette (figure 4) :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n \quad (1.2)$$

avec

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) \quad (1.3)$$

σ_n est la **contrainte normale** et $\vec{\tau}_n$ est le **vecteur cisaillement** ou **contrainte tangentielle**. σ_n est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

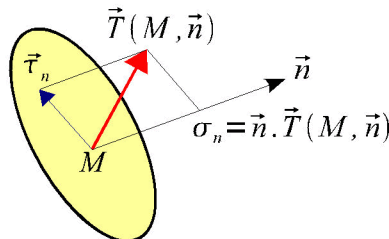


Figure 4 - Vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M

Remarque : on a la relation (théorème de Pythagore) :

$$\|\vec{T}\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2 \quad (1.4)$$

1.3 Formule de Cauchy : tenseur des contraintes

Considérons le tétraèdre infiniment petit $MABC$ construit sur les axes x , y et z (figure 5). Soient \vec{n} de composantes (n_x, n_y, n_z) la normale unitaire au plan ABC dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et dS l'aire du triangle ABC .

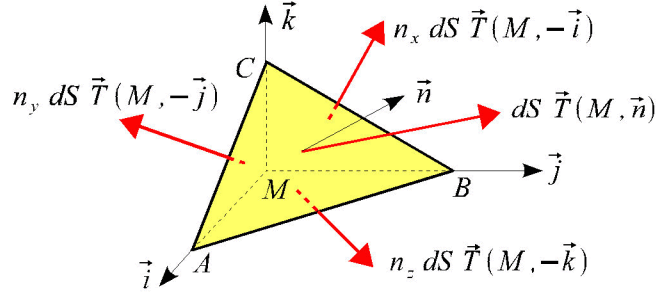


Figure 5 – Équilibre du tétraèdre (Cauchy)

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$dS \vec{T}(M, \vec{n}) + n_x dS \vec{T}(M, -\vec{i}) + n_y dS \vec{T}(M, -\vec{j}) + n_z dS \vec{T}(M, -\vec{k}) = \vec{0} \quad (1.7)$$

Il vient après simplification :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_x \vec{T}(M, \vec{i}) + n_y \vec{T}(M, \vec{j}) + n_z \vec{T}(M, \vec{k}) \quad (1.8)$$

Cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\{T(M, \vec{n})\} = \left[\{T(M, \vec{i})\} \quad \{T(M, \vec{j})\} \quad \{T(M, \vec{k})\} \right] \{n\} \quad (1.9)$$

soit :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)] \{n\} \quad (\text{formule de Cauchy}) \quad (1.10)$$

où $[\sigma(M)]$ est le **tenseur des contraintes**¹ **de Cauchy**² en M . Les composantes du tenseur des contraintes (figure 6) dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sont :

$$\text{composantes sur } \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{bmatrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

1. En fait, $[\sigma(M)]$ est la **représentation matricielle** dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ du tenseur des contraintes en M .

2. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

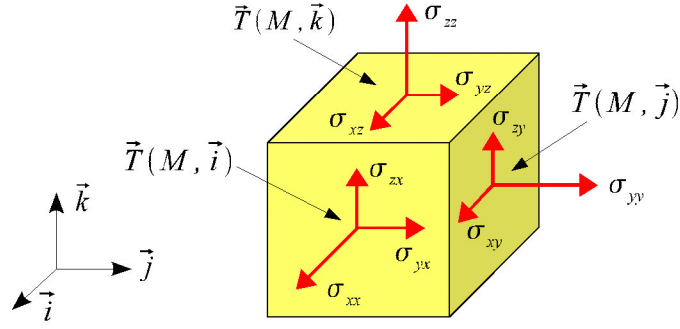


Figure 6 – Vecteur contrainte sur les facettes \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} en M

La contrainte normale sur la facette \vec{n} en M est égale à :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} \quad (1.12)$$

Remarque : sur la facette \vec{i} (figure 7), le vecteur contrainte est :

$$\vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx} \vec{i} + \sigma_{yx} \vec{j} + \sigma_{zx} \vec{k} \quad (1.13)$$

d'où la contrainte normale et le vecteur cisaillement :

$$\sigma_i = \vec{i} \cdot \vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx} \quad , \quad \vec{\tau}_i = \sigma_{yx} \vec{j} + \sigma_{zx} \vec{k} \quad (1.14)$$

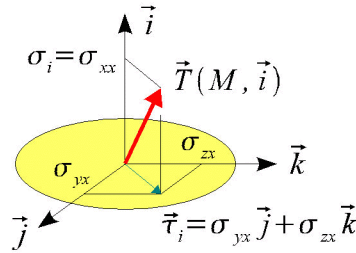


Figure 7 – Vecteur contrainte sur la facette \vec{i} en M

Changement de repère : considérons le repère orthonormé $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ avec :

$$\begin{bmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{i}' \cdot \vec{i} & \vec{j}' \cdot \vec{i} & \vec{k}' \cdot \vec{i} \\ \vec{i}' \cdot \vec{j} & \vec{j}' \cdot \vec{j} & \vec{k}' \cdot \vec{j} \\ \vec{i}' \cdot \vec{k} & \vec{j}' \cdot \vec{k} & \vec{k}' \cdot \vec{k} \end{bmatrix}}_{[R]} \quad (1.15)$$

et

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \end{bmatrix} [R]^{-1} \quad \text{avec} \quad [R]^{-1} = [R]^T \quad , \quad \det[R] = 1 \quad (1.16)$$

Soit \vec{V} un vecteur de composantes :

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad \text{dans le repère} \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \quad (1.17)$$

et :

$$\{V'\} = \begin{Bmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{Bmatrix} \quad \text{dans le repère} \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\} \quad (1.18)$$

On a les relations :

$$\vec{V} = V'_x \vec{i}' + V'_y \vec{j}' + V'_z \vec{k}' = \begin{bmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \end{bmatrix} \{V'\} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} [R] \{V'\} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \{V\} \quad (1.19)$$

On en déduit :

$$\{V\} = [R] \{V'\} \quad , \quad \{V'\} = [R]^{-1} \{V\} = [R]^T \{V\} \quad (1.20)$$

De la formule de Cauchy (1.10) et des relations :

$$\{T\} = [R] \{T'\} \quad , \quad \{n\} = [R] \{n'\} \quad (1.21)$$

on déduit :

$$[R] \{T'\} = [\sigma] [R] \{n'\} \quad (1.22)$$

d'où :

$$\{T'\} = [R]^T [\sigma] [R] \{n'\} \quad (1.23)$$

et la formule de transformation pour la matrice des contraintes :

$$[\sigma'] = [R]^T [\sigma] [R] \quad (1.24)$$

1.4 Équations d'équilibre

Soit \vec{f} la force par unité de volume appliquée au point de coordonnées (x, y, z) du solide.

Soient $\vec{\gamma}$ l'accélération du point de coordonnées (x, y, z) et ρ la masse volumique du matériau.

1.4.1 Équilibre en translation

Écrivons que la projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit, de centre M et de côtés dx , dy et dz , est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (8)) :

$$\begin{aligned} & -\sigma_{xx}(x, y, z) dy dz + \sigma_{xx}(x + dx, y, z) dy dz \\ & -\sigma_{xy}(x, y, z) dx dz + \sigma_{xy}(x, y + dy, z) dx dz \\ & -\sigma_{xz}(x, y, z) dx dy + \sigma_{xz}(x, y, z + dz) dx dy + f_x dx dy dz \\ & = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dV + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dV + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dV + f_x dV = \rho dV \gamma_x \end{aligned} \quad (1.25)$$

où $dV = dx dy dz$. Il vient après simplification :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho \gamma_x \quad (1.26a)$$

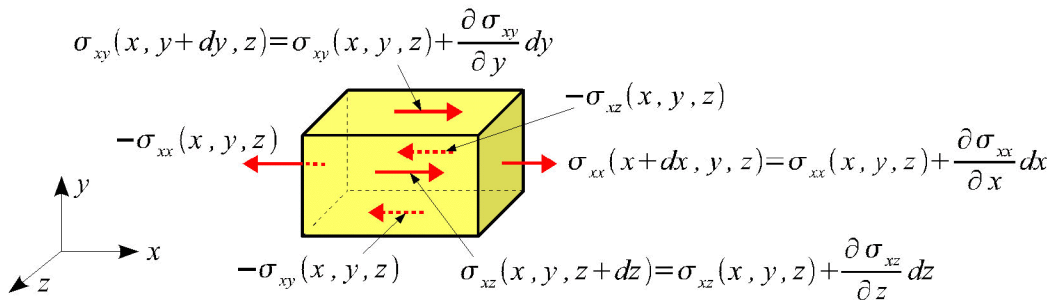


Figure 8 - Équilibre du parallélépipède suivant x

De même :

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = \rho \gamma_y \quad (1.26b)$$

et

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \gamma_z \quad (1.26c)$$

1.4.2 Équilibre en rotation : réciprocity des contraintes tangentielles

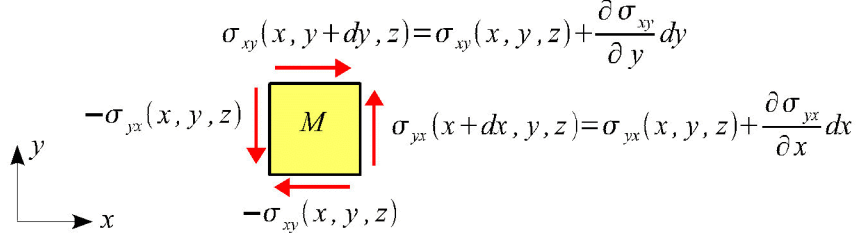


Figure 9 – Équilibre du parallélépipède en rotation suivant z

Écrivons que la projection sur Mz de la somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (9)). Il vient, en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieurs à 3 :

$$dx (dy dz \sigma_{yx}) - dy (dx dz \sigma_{xy}) = 0 \quad (1.27)$$

soit (réciprocity des contraintes tangentielles) :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (1.28)$$

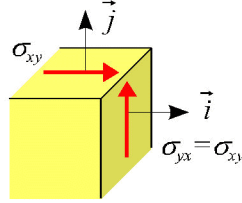


Figure 10 – Réciprocity des contraintes tangentielles

De même :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad , \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (1.29)$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique :

$$[\sigma] = [\sigma]^T \quad (1.30)$$

Remarques :

- Si \vec{n} et \vec{n}' sont deux facettes en M , on déduit de l'équation (1.30) :

$$\vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}') = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n'\} = \{n'\}^T [\sigma(M)] \{n\} = \vec{n}' \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) \quad \forall \vec{n}, \vec{n}' \quad (1.31)$$

- La contrainte normale sur la facette \vec{n} est :

$$\sigma_n = n_x^2 \sigma_{xx} + n_y^2 \sigma_{yy} + n_z^2 \sigma_{zz} + 2 n_x n_y \sigma_{xy} + 2 n_x n_z \sigma_{xz} + 2 n_y n_z \sigma_{yz} \quad (1.32)$$

1.5 Directions et contraintes principales

Existe-t-il en M une facette \vec{n} telle que le vecteur contrainte soit colinéaire avec \vec{n} (figure 11) ? Dans ce cas, le vecteur cisaillement est nul sur cette facette et le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ satisfait la relation :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} \quad (1.33)$$

soit :

$$[\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n \{n\} \quad (1.34)$$

σ_n est alors valeur propre du tenseur des contraintes et \vec{n} est le vecteur propre associé.

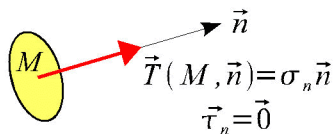


Figure 11 – Face et contrainte principale en M

$[\sigma(M)]$ est une matrice symétrique à coefficients réels. Elle a trois valeurs propres réelles (distinctes ou confondues). Si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont perpendiculaires entre eux.

Il existe donc en M un repère orthonormé $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ tel que sur les facettes \vec{n}_1 , \vec{n}_2 et \vec{n}_3 le vecteur cisaillement soit nul (figure 12).

Les directions \vec{n}_1 , \vec{n}_2 et \vec{n}_3 sont les **directions principales**.

Dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma]_{\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

où les contraintes normales σ_1 , σ_2 et σ_3 sont les **contraintes principales**.

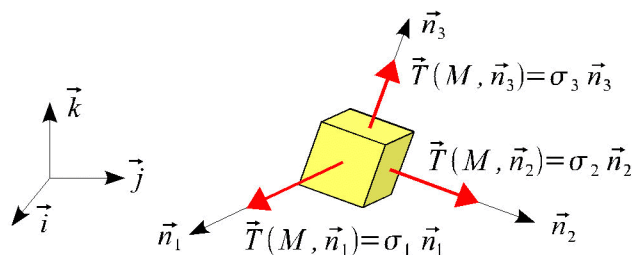


Figure 12 – Faces et contraintes principales en M

Les trois contraintes principales sont les racines de l'équation caractéristique (§ B) :

$$P(\sigma_n) = \det([\sigma(M)] - \sigma_n [\mathbf{I}]) = 0 \quad \text{où } [\mathbf{I}] \text{ est la matrice unité de dimension 3} \quad (1.36)$$

soit

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n + I_3 = 0 \quad (1.37)$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. I_1 , I_2 et I_3 sont des invariants :

$$I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.38a)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} ((\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}[\sigma]^2) = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (1.38b)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \det[\sigma] = \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 2 \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz} - \sigma_{xx} \sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy} \sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz} \sigma_{xy}^2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (1.38c)$$

Dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, les composantes du vecteur contrainte sur la facette \vec{n} sont :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix} \quad (1.39)$$

où n_1 , n_2 et n_3 sont les composantes de \vec{n} . Compte-tenu de la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

on en déduit :

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (1.40)$$

Quand \vec{n} varie, l'extrémité du vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ se déplace sur l'**ellipsoïde de Lamé** dont les axes sont les directions principales et les demi axes sont σ_1 , σ_2 et σ_3 .

1.6 Cercles de Mohr des contraintes

1.6.1 Cercle de Mohr des contraintes

En M , prenons comme repère le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$. Considérons la famille de facettes passant par la direction principale \vec{n}_3 (figure 13). Soit $\vec{n}(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, une de ces facettes. Sur cette facette, les composantes du vecteur contrainte sont :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.41)$$

Le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ est donc situé dans le plan $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$.

Soit \vec{t} le vecteur unitaire, situé dans le plan $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ et faisant avec \vec{n} un angle égal à $\frac{\pi}{2}$:

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Projetons le vecteur contrainte sur les axes \vec{n} et \vec{t} :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t} \quad (1.42)$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = -\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (1.43)$$

soit

$$\begin{cases} \sigma_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.44)$$

À chaque facette \vec{n} , nous pouvons donc associer un point P_n de coordonnées (σ_n, τ_n) dans le repère $\{\sigma_n, \tau_n\}$ orthonormé. Lorsque l'angle θ varie, ce point décrit le cercle de centre $(d, 0)$ et de rayon r (figure 13).

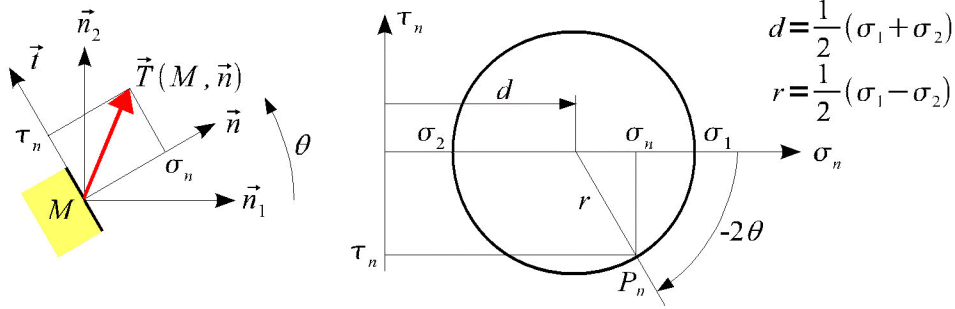


Figure 13 – Cercle de Mohr des contraintes

Remarques :

- Les points représentatifs des directions principales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont les intersections $(\sigma_1, 0)$ et $(\sigma_2, 0)$ du cercle avec l'axe σ_n .
- Si la facette \vec{n} fait un angle θ avec la facette \vec{n}_1 , son point représentatif sur le cercle de Mohr³ fait un angle -2θ avec le point représentatif de la facette \vec{n}_1 .

1.6.2 Cercles de Mohr des contraintes

Soit $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$ le vecteur contrainte sur la facette \vec{n} quelconque en M . Les relations :

$$\sigma_n = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} \quad , \quad T^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad , \quad \{n\}^T \{n\} = 1 \quad (1.45)$$

où $\tau_n = \|\vec{\tau}_n\|$ s'écrivent dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$:

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma_n \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \quad (1.46)$$

Si les trois contraintes principales sont distinctes, on en déduit :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases} \quad (1.47)$$

Si on suppose $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, les inégalités :

$$n_1^2 \geq 0 \quad , \quad n_2^2 \geq 0 \quad , \quad n_3^2 \geq 0 \quad (1.48)$$

3. Otto Mohr (1835-1918).

s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sigma_n + \sigma_2 \sigma_3 \geq 0 \\ \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_3 + \sigma_1) \sigma_n + \sigma_3 \sigma_1 \leq 0 \\ \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_1 + \sigma_2) \sigma_n + \sigma_1 \sigma_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.49)$$

soit :

$$\begin{cases} \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \end{cases} \quad (1.50)$$

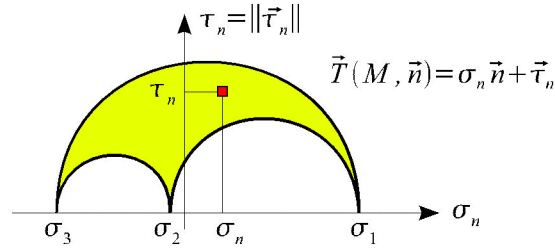


Figure 14 – Cercles de Mohr des contraintes

Le point de coordonnées $(\sigma_n, \tau_n = \|\vec{\tau}_n\|)$ se trouve (figure 14) :

- à l'extérieur du demi-cercle de centre $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$.
- à l'intérieur du demi-cercle de centre $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.
- à l'extérieur du demi-cercle de centre $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

Remarque : de cette étude, on déduit la valeur maximale en M de la contrainte normale :

$$\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (1.51)$$

et du cisaillement :

$$2 \tau_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (1.52)$$

1.7 États de contrainte particuliers

1.7.1 État de contrainte uniaxial : traction ou compression simple

L'état de contrainte en un point M est uniaxial par rapport à la direction \vec{v} (figure 15), si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

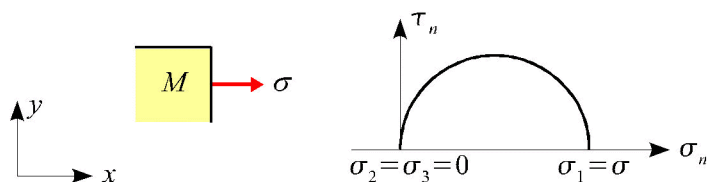


Figure 15 – *État de contrainte uniaxial*

Cet état de contraintes est appelé état de traction simple si σ est positif et état de compression simple si σ est négatif.

Le repère $\{M; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est le repère principal.

1.7.2 État de cisaillement simple

L'état de contrainte en M est un état de cisaillement simple par rapport aux deux directions \vec{i} et \vec{j} (figure 16), si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

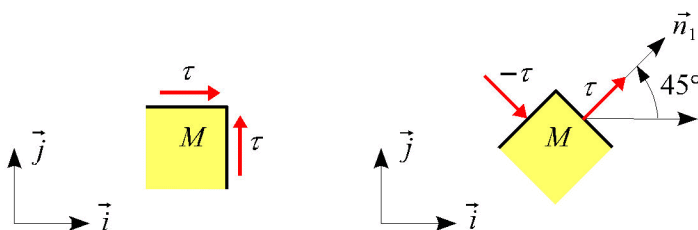


Figure 16 – *État de cisaillement simple : composantes du tenseur des contraintes*

Les contraintes principales et les directions principales sont :

$$\sigma_1 = \tau \quad , \quad \sigma_2 = -\tau \quad , \quad \sigma_3 = 0 \quad (1.55)$$

$$\{n_1\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_2\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.56)$$

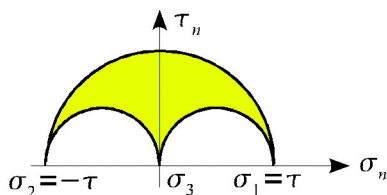


Figure 17 – *État de cisaillement simple : cercles de Mohr*

1.7.3 État de contrainte isotrope

L'état de contrainte en un point M est isotrope (ou sphérique) si :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} \quad \forall \vec{n} \quad (1.57)$$

Toute facette \vec{n} en M est face principale. Les trois contraintes principales sont égales à σ et le tenseur des contraintes en M a pour expression (quelque soit le repère) :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

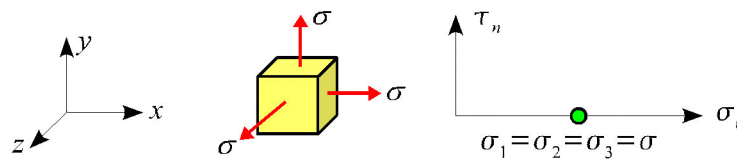


Figure 18 – État de contrainte isotrope

Les trois cercles de Mohr des contraintes se réduisent à un point (figure 18).

1.7.4 État de contrainte plan

En un point M , l'état de contrainte est dit plan par rapport aux deux directions \vec{i} et \vec{j} (figure 19), si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

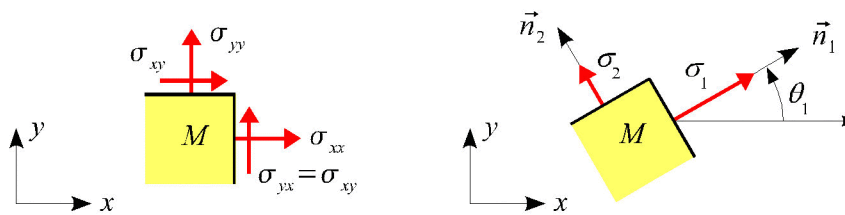


Figure 19 – État de contrainte plan : composantes du tenseur des contraintes

Le vecteur contrainte sur la facette \vec{k} est nul :

$$\vec{T}(M, \vec{k}) = \vec{0} \quad (1.60)$$

La direction \vec{k} est donc direction principale et la contrainte principale associée est nulle :

$$\vec{n}_3 = \vec{k} \quad , \quad \sigma_3 = 0 \quad (1.61)$$

Les deux autres directions principales sont les solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \sigma_n \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad (1.62)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.63)$$

Cette équation n'a de solution autre que la solution triviale $n_x = n_y = 0$ que si et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} = 0 \quad (1.64)$$

d'où l'équation polynomiale en σ_n :

$$\sigma_n^2 - \underbrace{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}_{\text{tr}[\sigma] = \sigma_1 + \sigma_2} \sigma_n + \underbrace{\sigma_{xx} \sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2}_{\det[\sigma] = \sigma_1 \sigma_2} = 0 \quad (1.65)$$

les contraintes principales :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4 \sigma_{xy}^2} \quad (1.66)$$

et les directions principales associées :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_{yy}} \quad (1.67)$$

où θ_1 est la position angulaire de la direction principale \vec{n}_1 par rapport à l'axe x (figure 19).

Les cercles de Mohr des contraintes sont représentés sur la figure 20.

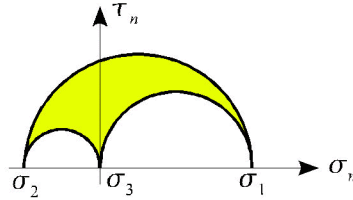


Figure 20 - État de contrainte plan : cercles de Mohr des contraintes

Construction du cercle de Mohr de la famille de facettes passant par z : les facettes \vec{i} et \vec{j} sont deux facettes orthogonales de cette famille. Les points représentatifs P_i et P_j de ces facettes dans le plan de Mohr sont donc deux points diamétralement opposés du cercle (figure 22). Les coordonnées de ces points sont (figure 21) :

- facette \vec{i} : $P_i = (\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}, \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xy})$
- facette \vec{j} : $P_j = (\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{j}) = \sigma_{yy}, \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{j}) = -\sigma_{xy})$

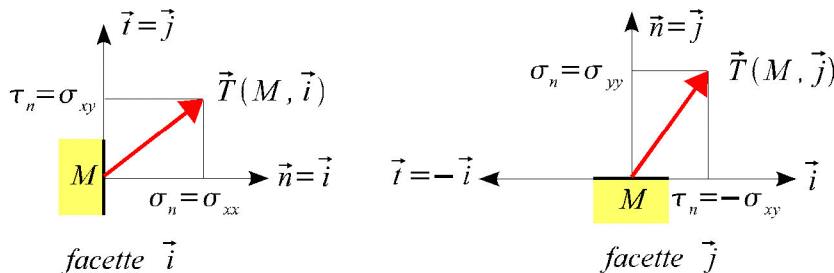


Figure 21 - État de contrainte plan : facettes \vec{i} et \vec{j}

On en déduit la construction du cercle de Mohr (figure 22) : dans le repère orthonormé $\{\sigma_n, \tau_n\}$, on trace le cercle de diamètre $P_i(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) P_j(\sigma_{yy}, -\sigma_{xy})$. À l'aide d'une règle, on mesure les contraintes principales σ_1 et σ_2 , puis à l'aide d'un rapporteur l'angle $2\theta_1$.

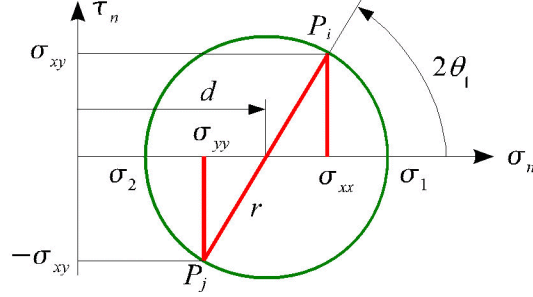


Figure 22 - Cercle de Mohr

Changement de repère : dans le repère orthonormé $\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}$ (figure 23) avec :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{t\} = \begin{Bmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.68)$$

le tenseur des contraintes a pour expression (équation 1.24) :

$$[\sigma]_{\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}} = [R]^T [\sigma]_{\{M; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}} [R] \quad (1.69)$$

où la matrice de transformation $[R]$ est égale à :

$$[R] = [\{n\} \quad \{t\} \quad \{0\}] = \begin{bmatrix} n_x & -n_y & 0 \\ n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

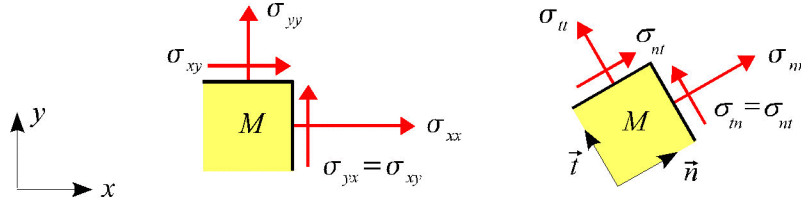


Figure 23 - Composantes du tenseur des contraintes dans le repère $\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}$

On en déduit :

$$[\sigma]_{\{M; \vec{n}, \vec{t}, \vec{k}\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{nt} & 0 \\ \sigma_{nt} & \sigma_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= n_x^2 \sigma_{xx} + n_y^2 \sigma_{yy} + 2 n_x n_y \sigma_{xy}, & \sigma_{tt} &= n_y^2 \sigma_{xx} + n_x^2 \sigma_{yy} - 2 n_x n_y \sigma_{xy} \\ \sigma_{nt} &= n_x n_y (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + (n_x^2 - n_y^2) \sigma_{xy} \end{aligned}$$

Remarque : on a les relations :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} \\ \sigma_{nt} &= \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{t\}^T [\sigma(M)] \{n\} = \{n\}^T [\sigma(M)] \{t\} \\ \sigma_{tt} &= \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{t}) = \{t\}^T [\sigma(M)] \{t\} \end{aligned}$$

CHAPITRE III : ANALYSE DES DEFORMATIONS

III. Déformations

Sous l'action des forces appliquées, les points d'un solide se déplacent. Il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des **variations de longueur** et des **variations d'angle** appelées **déformations** (figure 1).

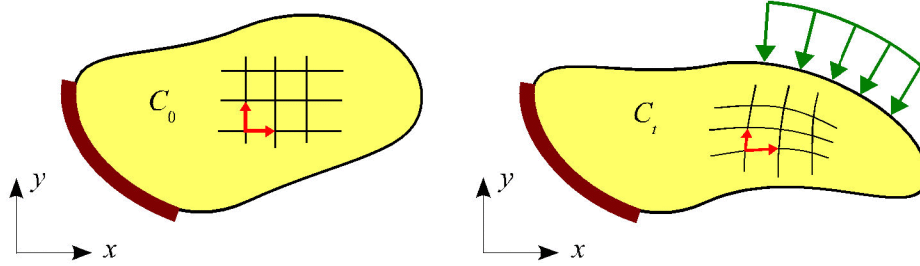


Figure1 – Déformations dans un solide

III.1 Configuration, vecteur déplacement

Le volume occupé par le solide à l'instant t est noté C_t et appelé **configuration courante**. La **configuration initiale** C_0 est la configuration de référence.

Le point M_0 de la configuration initiale devient le point M de la configuration courante (figure 2) :

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{x}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{OM} = \vec{x} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (1)$$

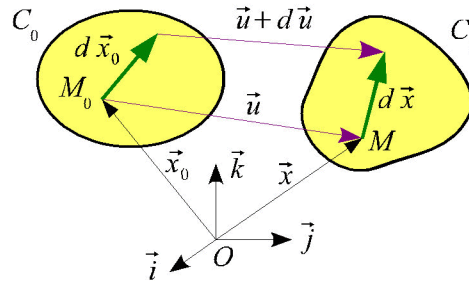


Figure 2 – Transformation d'un point et d'un vecteur

On appelle **vecteur déplacement** du point M_0 le vecteur :

$$\vec{u}(M_0; t) = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \quad (2)$$

où u , v et w sont des fonctions continues et dérivables de x_0 , y_0 et z_0 , d'où :

$$\vec{x}(M_0; t) = \vec{x}_0 + \vec{u}(M_0; t) \quad (3)$$

Les coordonnées du point M s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x(x_0, y_0, z_0; t) \\ y(x_0, y_0, z_0; t) \\ z(x_0, y_0, z_0; t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x_0, y_0, z_0; t) \\ v(x_0, y_0, z_0; t) \\ w(x_0, y_0, z_0; t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

x_0, y_0 et z_0 sont les **coordonnées de Lagrange**⁴ et la description est dite lagrangienne.

L'équation (4) définit la **transformation** qui fait passer le solide de la configuration initiale C_0 à la configuration C_t .

III.2 Transformation des vecteurs : tenseur gradient de la transformation

Le vecteur infiniment petit $d\vec{x}_0$ en M_0 devient $d\vec{x}$ en M dans la configuration C_t (figures 2 et 3) :

$$d\vec{x} = d\vec{x}_0 + d\vec{u} \quad (5)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{dx\} = \{dx_0\} + \{du\} = ([I] + [L]) \{dx_0\} = [F] \{dx_0\} \quad (6)$$

où :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$[F]$ est le **tenseur gradient de la transformation** (ou tenseur gradient de la déformation).

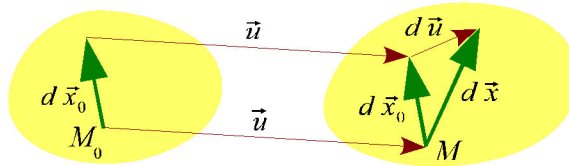


Figure3 - Transformation du vecteur $d\vec{x}_0$

Nous admettons que la transformation est biunivoque :

$$0 < \det[F] < \infty, \quad \{dx_0\} = [F]^{-1} \{dx\} \quad (8)$$

Deux points voisins dans la configuration C_0 sont voisins dans la configuration C_t .

La figure (4) montre, dans le cas d'un problème plan, la signification physique des composantes du tenseur gradient de la transformation.

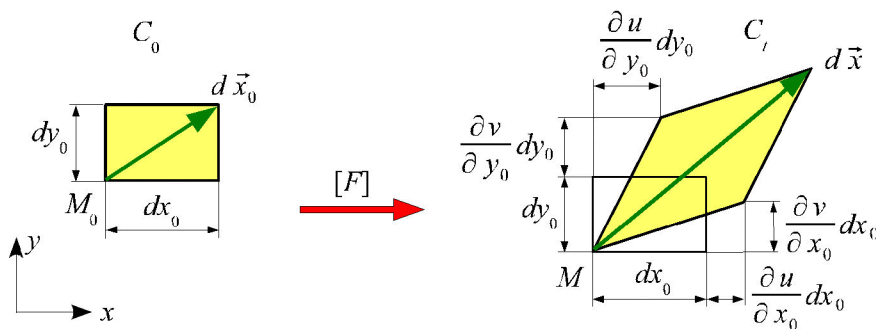


Figure4 - Problème plan : transformation d'un vecteur

4. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

$[L]$ peut être décomposé en sa partie symétrique $[\varepsilon]$ et sa partie antisymétrique $[\Omega]$:

$$[L] = [\Omega] + [\varepsilon] \quad (9)$$

avec :

$$[\Omega] = \frac{1}{2} ([L] - [L]^T) \quad , \quad [\Omega] = -[\Omega]^T \quad (10)$$

et

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} ([L] + [L]^T) \quad , \quad [\varepsilon] = [\varepsilon]^T \quad (11)$$

d'où :

$$[F] = [I] + [\varepsilon] + [\Omega] \quad (12)$$

III.3 Tenseur des dilatations

Considérons en M_0 deux vecteurs infiniment petits $d\vec{x}_0$ et $d\vec{x}'_0$ (figure 5). Ces vecteurs deviennent $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ dans la configuration C_t :

$$\{dx\} = [F] \{dx_0\} \quad , \quad \{dx'\} = [F] \{dx'_0\} \quad (13)$$

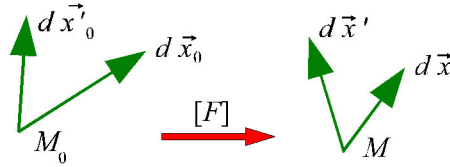


Figure5 - Transformation des vecteurs $d\vec{x}_0$ et $d\vec{x}'_0$

Le produit scalaire des deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ s'écrit :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = \{dx\}^T \{dx'\} = \{dx_0\}^T [F]^T [F] \{dx'_0\} = \{dx_0\}^T [C] \{dx'_0\} \quad (14)$$

où

$$[C] = [F]^T [F] = ([I] + [L]^T)([I] + [L]) = [I] + [L]^T + [L] + [L]^T [L] \quad (15)$$

est le **tenseur des dilatations**.

Si $d\vec{x}'_0 = d\vec{x}_0$, il vient :

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \{dx_0\}^T [C] \{dx_0\} > 0 \quad \forall d\vec{x}_0 \neq \vec{0} \quad (16)$$

où ds est la longueur du vecteur $d\vec{x}$: la matrice $[C]$ est définie positive.

III.4 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Soit ds_0 la longueur du vecteur $d\vec{x}_0$ et ds celle du vecteur $d\vec{x}$; la différence $ds^2 - ds_0^2$ s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{x}_0 \cdot d\vec{x}_0 \\ &= \{dx\}^T \{dx\} - \{dx_0\}^T \{dx_0\} = \{dx_0\}^T ([C] - [I]) \{dx_0\} \\ &= 2 \{dx_0\}^T [E] \{dx_0\} \end{aligned} \quad (17)$$

où :

$$[E] = \frac{1}{2} ([C] - [I]) = \underbrace{\frac{1}{2} ([L]^T + [L])}_{\text{termes linéaires}} + \underbrace{\frac{1}{2} [L]^T [L]}_{\text{termes non linéaires}} \quad (18)$$

est le **tenseur des déformations de Green-Lagrange**⁵.

Remarque : si $[E] = [0]$, on a :

$$ds^2 = ds_0^2 \quad \forall d\vec{x}_0 \quad (19)$$

Le voisinage du point M_0 subit un **mouvement de corps rigide (translation et/ou rotation)** entre les configurations C_0 et C_t . La condition $[E] = [0]$ implique pour le tenseur des dilatations :

$$[C] = [F]^T [F] = [I] \quad \text{d'où} \quad [F]^T = [F]^{-1} \quad (20)$$

Dans le repère $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont :

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ & E_{yy} & E_{yz} \\ \text{sym.} & & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (21)$$

avec (« notation de Voigt ») :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{xy} = E_{yx} \\ E_{xz} = E_{zx} \\ E_{yz} = E_{zy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial y_0} \\ \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \end{array} \right\}}_{\text{termes linéaires}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_0} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y_0} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z_0} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial y_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{\partial u}{\partial y_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{array} \right\}}_{\text{termes non linéaires}} \quad (22)$$

Remarques :

- Le tenseur des dilatations s'écrit en fonction du tenseur des déformations :

$$[C] = [I] + 2[E] \quad (23)$$

- Les composantes du tenseur des déformations sont sans dimension.

III.5 Transformation des longueurs et des angles

iii.5.1 Dilatation

Considérons en M_0 le vecteur infiniment petit $d\vec{x}_0$ de longueur ds_0 porté par le vecteur unitaire \vec{n}_0 :

$$d\vec{x}_0 = ds_0 \vec{n}_0 \quad (24)$$

Ce vecteur devient $d\vec{x}$ de longueur ds dans la configuration C_t (figure 6).

5. George Green (1793-1841).

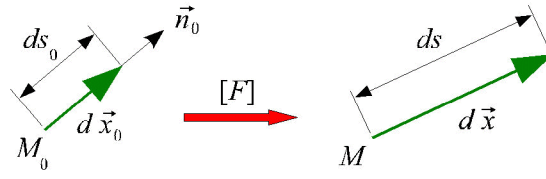


Figure6 – Dilatation en M_0 dans la direction \vec{n}_0

On appelle dilatation en M_0 dans la direction \vec{n}_0 la quantité :

$$\lambda(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\{n_0\}^T [C] \{n_0\}} = \sqrt{1 + 2 \{n_0\}^T [E] \{n_0\}} \quad (25)$$

Remarque : si $\vec{n}_0 = \vec{i}$, il vient :

$$\lambda(M_0, \vec{i}) = \sqrt{C_{xx}} = \sqrt{1 + 2 E_{xx}} \quad (26)$$

iii.5.2 Déformation de Green-Lagrange

On appelle déformation de Green-Lagrange en M_0 dans la direction \vec{n}_0 la quantité :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2 ds_0^2} = \{n_0\}^T [E] \{n_0\} \quad (27)$$

Remarque : si $\vec{n}_0 = \vec{i}$, il vient :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{i}) = E_{xx} \quad (28)$$

iii.5.3 Allongement unitaire (déformation de l'ingénieur)

On appelle allongement unitaire en M_0 dans la direction \vec{n}_0 la quantité :

$$\varepsilon(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \lambda(M_0, \vec{n}_0) - 1 = \sqrt{1 + 2 \{n_0\}^T [E] \{n_0\}} - 1 \quad (29)$$

Remarque : si $\vec{n}_0 = \vec{i}$, on obtient :

$$\varepsilon(M_0, \vec{i}) = \sqrt{C_{xx}} - 1 = \sqrt{1 + 2 E_{xx}} - 1 \quad (30)$$

iii.5.4 Transformation des angles : glissement de deux directions orthogonales

Considérons en M_0 deux vecteurs infiniment petits $d\vec{x}_0$ et $d\vec{x}'_0$ portés par les deux directions orthogonales \vec{n}_0 et \vec{n}'_0 (figure 7) :

$$d\vec{x}_0 = ds_0 \vec{n}_0 \quad , \quad d\vec{x}'_0 = ds'_0 \vec{n}'_0 \quad , \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{n}'_0 = 0 \quad (31)$$

Ces vecteurs deviennent $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ de longueur ds et ds' dans la configuration C_t . Soit φ l'angle que font entre eux les vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$.

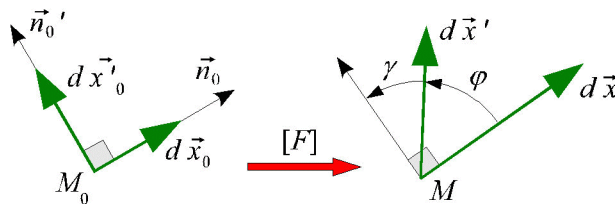


Figure7 – Glissement en M_0 dans les directions orthogonales \vec{n}_0 et \vec{n}'_0

On appelle glissement en M_0 dans les directions orthogonales \vec{n}_0 et \vec{n}'_0 la quantité :

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (32)$$

Le produit scalaire des deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ s'écrit (équation 2.14) :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = ds_0 ds'_0 \{n_0\}^T [C] \{n'_0\} = ds ds' \cos \varphi = ds ds' \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = ds ds' \sin \gamma \quad (33)$$

d'où l'expression du glissement en M_0 des deux directions orthogonales \vec{n}_0 et \vec{n}'_0 :

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) = \arcsin \frac{\{n_0\}^T [C] \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} = \arcsin \frac{2 \{n_0\}^T [E] \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} \quad (34)$$

Remarque : si $\vec{n}_0 = \vec{i}$ et $\vec{n}'_0 = \vec{j}$, il vient :

$$\gamma(M_0, \vec{i}, \vec{j}) = \arcsin \frac{C_{xy}}{\sqrt{C_{xx} C_{yy}}} = \arcsin \frac{2 E_{xy}}{\sqrt{(1 + 2 E_{xx}) (1 + 2 E_{yy})}} \quad (35)$$

iii.5.5 Transformation des volumes et des surfaces

Le parallélépipède de volume infiniment petit dV_0 construit en M_0 sur les vecteurs \vec{a}_0 , \vec{b}_0 et \vec{c}_0 (le trièdre $\{\vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{c}_0\}$ est direct) devient le parallélépipède de volume dV construit en M sur les vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} (figure 8).

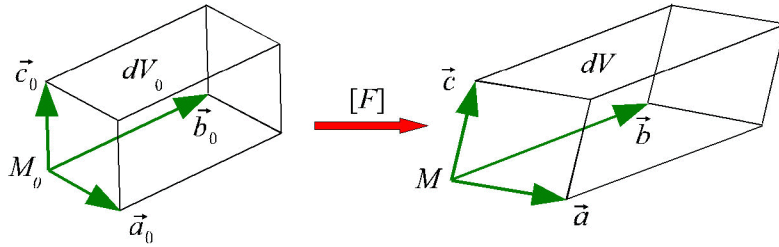


Figure8 - Transformation d'un volume infinitésimal

On a les relations :

$$dV_0 = (\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0) \cdot \vec{c}_0 = \det [\{a_0\} \{b_0\} \{c_0\}] \quad (36)$$

$$\begin{aligned} dV &= (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det [\{a\} \{b\} \{c\}] \\ &= \det ([F] [\{a_0\} \{b_0\} \{c_0\}]) = \det[F] \det [\{a_0\} \{b_0\} \{c_0\}] \end{aligned} \quad (37)$$

d'où :

$$dV = \det[F] dV_0 \quad (38)$$

On appelle **dilatation volumique** en M_0 , la quantité :

$$\lambda_V(M_0) = \frac{dV}{dV_0} = \det[F] \quad (39)$$

On appelle **déformation volumique** en M_0 , la quantité :

$$\varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \det[F] - 1 \quad (40)$$

La surface dA_0 construite sur les vecteurs \vec{a}_0 et \vec{b}_0 devient la surface dA construite sur les vecteurs \vec{a} et \vec{b} (figure 9). Des relations :

$$\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0 = \vec{n}_0 dA_0 \quad , \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{n} dA \quad (41)$$

où les vecteurs \vec{n}_0 et \vec{n} sont unitaires, on déduit :

$$dV_0 = \vec{c}_0 \cdot \vec{n}_0 dA_0 = \{c_0\}^T \{n_0\} dA_0 \quad , \quad dV = \vec{c} \cdot \vec{n} dA = \{c\}^T \{n\} dA \quad (42)$$

d'où :

$$dV = \{c_0\}^T [F]^T \{n\} dA = \det[F] dV_0 = \det[F] \{c_0\}^T \{n_0\} dA_0 \quad (43)$$

Cette relation est vérifiée pour tout vecteur \vec{c}_0 , d'où :

$$[F]^T \{n\} dA = \det[F] \{n_0\} dA_0 \quad (44)$$

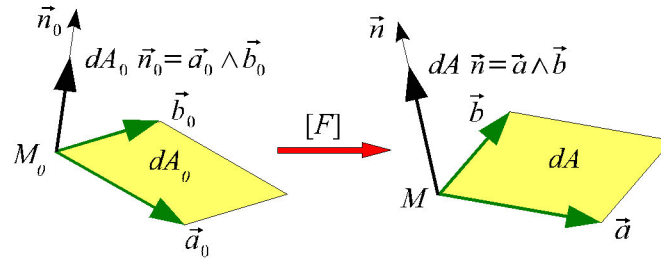


Figure9 – Transformation d'une surface infinitésimale

On en déduit :

$$\{n\} dA = \det[F] [F]^{-T} \{n_0\} dA_0 \quad , \quad [F]^{-T} = ([F]^{-1})^T = ([F]^T)^{-1} \quad (45)$$

III.6 Repère principal, dilatations et déformations principales

La matrice $[C]$ est symétrique, à coefficients réels et définie positive (équation 16). Ses valeurs propres (ou valeurs principales) sont positives. Il existe en M_0 un repère orthonormé (ou repère principal) $\{M_0; \vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}, \vec{n}_{03}\}$ tel que :

$$[C]\{n_{0i}\} = \lambda_i^2 \{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (46)$$

où λ_i est la dilatation principale en M_0 dans la direction principale \vec{n}_{0i} .

De l'expression du glissement de deux directions orthogonales (équation 34), on déduit que le glissement de deux directions principales est nul (figure 12).

De la relation :

$$\det[C] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = \det([F]^T [F]) = (\det[F])^2 \quad (47)$$

on déduit l'expression de la dilatation volumique (équation 39) en fonction des dilatations principales :

$$\lambda_V(M_0) = \det[F] = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (48)$$

Le tenseur des déformations $[E]$ a les mêmes directions principales que $[C]$. En effet, des équations (23) et (46) on déduit :

$$([I] + 2[E]) \{n_{0i}\} = \lambda_i^2 \{n_{0i}\} \quad (49)$$

d'où :

$$[E]\{n_{0i}\} = E_i \{n_{0i}\} \quad \text{avec} \quad E_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) \quad (50)$$

Soit $\{dx_0\}$ un vecteur infiniment petit porté par la direction principale $\{n_{0i}\}$:

$$[C]\{dx_0\} = [F]^T [F]\{dx_0\} = \lambda_i^2 \{dx_0\} \quad (51)$$

On en déduit :

$$[F]^T \{dx\} = \lambda_i^2 \{dx_0\} \quad (52)$$

où $\{dx\} = [F]\{dx_0\}$, puis en multipliant les deux membres de cette équation par $[F]$:

$$[F][F]^T \{dx\} = \lambda_i^2 [F]\{dx_0\} = \lambda_i^2 \{dx\} \quad (53)$$

et :

$$[F][F]^T \{n_i\} = \lambda_i^2 \{n_i\} \quad (54)$$

où $\{n_i\}$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\{dx\}$:

$$\{n_i\} = \frac{1}{\lambda_i} [F] \{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (55)$$

Le repère $\{M_0; \vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}, \vec{n}_{03}\}$ est le repère principal de la transformation en M_0 . Le repère $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ est le repère principal de la transformation en M .

Transformation d'une sphère : l'extrémité du vecteur $d\vec{x}_0$ en M_0 décrit la sphère infiniment petite de rayon dr_0 :

$$\{dx_0\}^T \{dx_0\} = dr_0^2 \quad (56)$$

$d\vec{x}_0$ devient $d\vec{x}$ en M . L'extrémité du vecteur $d\vec{x}$ décrit la surface d'équation :

$$\{dx\}^T [F]^{-T} [F]^{-1} \{dx\} = \{dx\}^T ([F][F]^T)^{-1} \{dx\} = dr_0^2 \quad (57)$$

Si on prend comme repère en M , le repère principal du tenseur $[F][F]^T$ (équation 54), cette équation s'écrit :

$$\left(\frac{dx}{\lambda_1 dr_0} \right)^2 + \left(\frac{dy}{\lambda_2 dr_0} \right)^2 + \left(\frac{dz}{\lambda_3 dr_0} \right)^2 = 1 \quad (58)$$

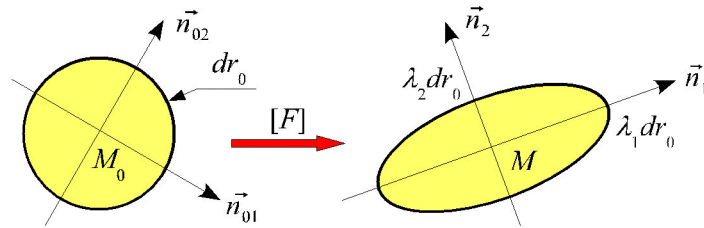


Figure10 - Transformation d'un cercle : ellipse des dilatations (problème plan)

La sphère de rayon dr_0 en M_0 devient en M l'ellipsoïde dont les axes sont les transformés des directions principales de $[C]$ et les demi-axes sont $\lambda_1 dr_0$, $\lambda_2 dr_0$ et $\lambda_3 dr_0$ (figure 10).

III.7 Décomposition polaire

Le déterminant de $[F]$ étant différent de 0, $[F]$ peut être décomposé de façon unique sous les deux formes :

$$[F] = [R][U] = [V][R] \quad (59)$$

où :

- $[R]$ est une matrice orthonormale :

$$[R]^T [R] = [R][R]^T = [I] \quad , \quad \det[R] = 1 \quad (60)$$

et représente un **mouvement de corps rigide** (rotation).

- $[U]$ et $[V]$ sont deux matrices symétriques définies positives et représentent un **mouvement de déformation pure**.

Remarque : les matrices $[U]$ et $[V]$ sont liées par les relations :

$$[V] = [R][U][R]^T \quad , \quad [U] = [R]^T[V][R] \quad (61)$$

De la relation $[C] = [F]^T[F]$ on déduit :

$$[C] = [U]^2 \quad (62)$$

La matrice des dilatations $[C]$ et la matrice $[U]$ ont les mêmes directions principales $\{n_{0i}\}$. Les valeurs principales de $[U]$ sont les dilatations principales λ_i :

$$[U] \{n_{0i}\} = \lambda_i \{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (63)$$

On en déduit l'expression de $[U]$ (décomposition spectrale) :

$$[U] = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \{n_{0i}\} \{n_{0i}\}^T \quad , \quad \sum_{i=1}^3 \{n_{0i}\} \{n_{0i}\}^T = [I] \quad (64)$$

La matrice de rotation s'écrit :

$$[R] = [F] [U]^{-1} \quad (65)$$

De même, de l'équation (54) et de la relation :

$$[F][F]^T = [V]^2 \quad (66)$$

on déduit :

$$[V] \{n_i\} = \lambda_i \{n_i\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (67)$$

et

$$[V] = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \{n_i\} \{n_i\}^T \quad , \quad \sum_{i=1}^3 \{n_i\} \{n_i\}^T = [I] \quad (68)$$

Les vecteurs unitaires $\{n_{0i}\}$ et $\{n_i\}$ sont liés par la relation :

$$\{n_i\} = [R] \{n_{0i}\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (69)$$

La figure (11) montre la transformation par $[F]$, $[U]$, $[V]$ et $[R]$ d'un cercle infiniment petit de centre M_0 , de rayon dr_0 et situé dans le plan $\{M_0; \vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}\}$.

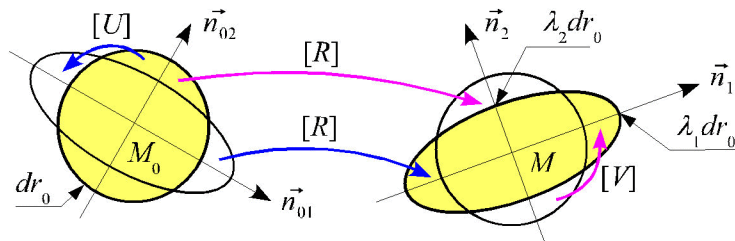


Figure11 – Décomposition polaire : transformation d'un cercle (problème plan)

La figure (12) montre la transformation par $[F]$, $[U]$, $[V]$ et $[R]$ d'un rectangle infiniment petit construit sur les directions principales \vec{n}_{01} et \vec{n}_{02} de la déformation en M_0 .

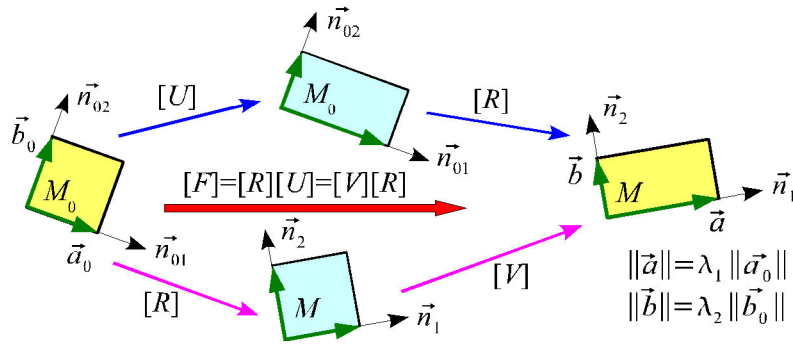


Figure12 – Décomposition polaire : transformation de deux vecteurs orthogonaux portés par les directions principales (problème plan)

Remarque : si les côtés du rectangle ne sont pas deux directions principales du tenseur $[C]$ en M_0 , les arêtes du rectangle subissent une rotation lors de la transformation $[U]$ ou $[V]$ (figure 13).

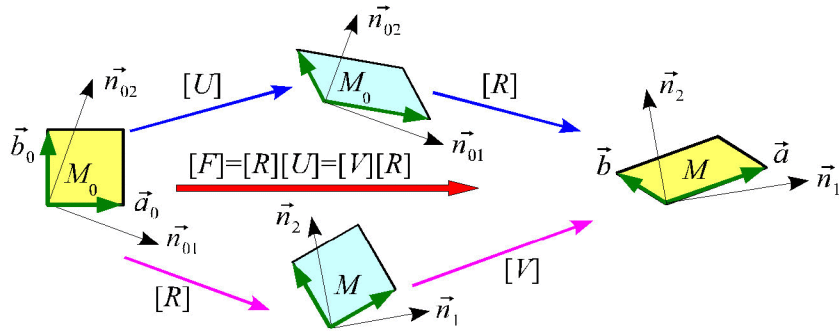


Figure13 – Décomposition polaire : transformation de deux vecteurs orthogonaux (problème plan)

III.8 Petits déplacements et petites déformations : élasticité linéaire

On admettra les hypothèses suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport aux dimensions du solide.
- Les dérivées des déplacements par rapport à x_0, y_0, z_0 sont petites devant l'unité :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right| \ll 1 \quad , \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y_0} \right| \ll 1 \quad \dots \quad (70)$$

Si f une fonction de x_0, y_0, z_0 , on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial x} \quad (71)$$

De même :

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_0} \simeq \frac{\partial f}{\partial z} \quad (72)$$

Rappels : si x et y sont petits devant l'unité ($|x| \ll 1$, $|y| \ll 1$), on a les relations :

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} \quad , \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x \quad , \quad (1+x)(1+y) \simeq 1 + x + y \quad , \quad \sin x \simeq x \quad (73)$$

iii.8.1 Tenseur des déformations linéarisé

Le tenseur des déformations (équation 18) se réduit à :

$$[E] \simeq \frac{1}{2} ([L]^T + [L]) = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (74)$$

où :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} & , & \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} & , & \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & , & 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & , & 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (75)$$

Le tenseur $[\varepsilon]$ est appelé **tenseur des déformations linéarisé**.

Le tenseur des dilatations (équation 23) se réduit à :

$$[C] \simeq [I] + 2[\varepsilon] \quad (76)$$

iii.8.2 Transformation des longueurs et des angles

L'**allongement unitaire** et la **dilatation** en M et dans la direction \vec{n} (équations 29 et 25) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon(M, \vec{n}) &\simeq \{n\}^T [\varepsilon] \{n\} \\ &= \varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{xz} n_x n_z + \gamma_{yz} n_y n_z \end{aligned} \quad (77)$$

$$\lambda(M, \vec{n}) \simeq 1 + \{n\}^T [\varepsilon] \{n\} \quad (78)$$

Si \vec{n} est l'un des axes \vec{i} , \vec{j} ou \vec{k} , on obtient :

$$\varepsilon(M, \vec{i}) \simeq \varepsilon_{xx} \quad , \quad \varepsilon(M, \vec{j}) \simeq \varepsilon_{yy} \quad , \quad \varepsilon(M, \vec{k}) \simeq \varepsilon_{zz} \quad (79)$$

$$\lambda(M, \vec{i}) \simeq 1 + \varepsilon_{xx} \quad , \quad \lambda(M, \vec{j}) \simeq 1 + \varepsilon_{yy} \quad , \quad \lambda(M, \vec{k}) \simeq 1 + \varepsilon_{zz} \quad (80)$$

Remarque :

$$\varepsilon_{GL}(M, \vec{n}) \simeq \varepsilon(M, \vec{n}) \quad (81)$$

Le **glissement** en M dans les **directions orthogonales** \vec{n} et \vec{n}' (équation 34) s'écrit :

$$\gamma(M, \vec{n}, \vec{n}') \simeq 2 \{n'\}^T [\varepsilon] \{n\} \quad (82)$$

Si \vec{n} et \vec{n}' sont l'un des axes \vec{i} , \vec{j} ou \vec{k} , on obtient :

$$\gamma(M, \vec{i}, \vec{j}) \simeq \gamma_{xy} \quad , \quad \gamma(M, \vec{i}, \vec{k}) \simeq \gamma_{xz} \quad , \quad \gamma(M, \vec{j}, \vec{k}) \simeq \gamma_{yz} \quad (83)$$

La figure (14) montre la signification physique des composantes du tenseur des déformations dans le cas d'un problème plan.

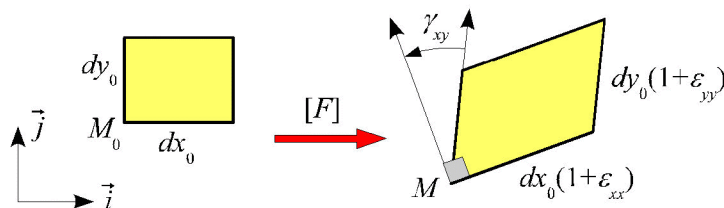


Figure14 – Déformation plane : transformation d'un rectangle construit sur les axes \vec{i} et \vec{j}

Le volume infiniment petit dV_0 en M_0 devient dV en M :

$$dV = \det([F]) dV_0 \simeq (1 + \text{tr}[\varepsilon]) dV_0 = (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) dV_0 \quad (84)$$

La **déformation volumique** (équation 40) en M se réduit à :

$$\varepsilon_V(M) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \simeq \text{tr}[\varepsilon] = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \vec{u} \quad (85)$$

iii.8.3 Directions et valeurs principales

En M , dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, le tenseur des déformations se réduit à :

$$[\varepsilon]_{\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (86)$$

où ε_1 , ε_2 et ε_3 sont les déformations principales.

Remarque : les dilatations principales sont :

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_1 \quad , \quad \lambda_2 = 1 + \varepsilon_2 \quad , \quad \lambda_3 = 1 + \varepsilon_3 \quad (87)$$

iii.8.4 Décomposition polaire

Les tenseurs $[R]$, $[U]$ et $[V]$ (§ IV.7) sont voisins de l'unité. Posons :

$$[R] = [I] + [r] \quad [U] = [I] + [u] \quad , \quad [V] = [I] + [v] \quad (88)$$

La condition $[R]^T[R] = [I]$ s'écrit :

$$([I] + [r])^T ([I] + [r]) \simeq [I] + [r] + [r]^T = [I] \quad (89)$$

d'où

$$[r] = -[r]^T \quad (90)$$

La matrice $[r]$ est antisymétrique.

La condition :

$$[C] = [F]^T [F] = [U]^2 \quad \text{soit} \quad ([I] + [\varepsilon] + [\Omega])^T ([I] + [\varepsilon] + [\Omega]) = ([I] + [u])^2 \quad (91)$$

s'écrit au premier ordre près :

$$[I] + 2[\varepsilon] \simeq [I] + 2[u] \quad \text{d'où} \quad [u] \simeq [\varepsilon] \quad (92)$$

De même, la relation $[F][F]^T = [V]^2$ implique :

$$[v] \simeq [\varepsilon] \quad (93)$$

La relation :

$$[F] = [I] + [\Omega] + [\varepsilon] = [R][U] = ([I] + [r]) ([I] + [u]) \quad (94)$$

s'écrit au premier ordre près :

$$[F] = [I] + [\Omega] + [\varepsilon] \simeq [I] + [r] + [u] \quad (95)$$

d'où :

$$[r] \simeq [\Omega] \quad (96)$$

La matrice de rotation $[R]$ et les matrices de déformation pure $[U]$ et $[V]$ se réduisent à :

$$[R] \simeq [I] + [\Omega] \quad , \quad [U] \simeq [V] \simeq [I] + [\varepsilon] \quad (97)$$

Les composantes de $[\Omega]$ sont :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (98)$$

où les composantes du vecteur $\vec{\omega}$ sont :

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (99)$$

La contribution de $[\Omega]$ à la transformation du vecteur $d\vec{x}_0$ en M_0 s'écrit :

$$\{dx\} = [\Omega]\{dx_0\} \quad \text{soit} \quad d\vec{x} = \vec{\omega} \wedge d\vec{x}_0 = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \wedge d\vec{x}_0 \quad (100)$$

et représente une rotation infiniment petite du vecteur $d\vec{x}_0$ autour de l'axe $\vec{\omega}$ en M .

iii.8.5 Cercle de Mohr des déformations

En M , prenons comme repère, le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$. Considérons la famille de facettes passant par la direction principale \vec{n}_3 . Soit \vec{n} ($\cos \theta, \sin \theta, 0$), une facette appartenant à cette famille et \vec{t} ($-\sin \theta, \cos \theta, 0$) le vecteur unitaire, situé dans le plan $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ et faisant avec \vec{n} un angle égal à $\pi/2$. A chaque facette \vec{n} , nous pouvons associer les deux quantités ε_n et γ_{nt} définies par les équations (77) et (82) :

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \\ \gamma_{nt} = \gamma(M, \vec{n}, \vec{t}) = 2 \{t\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} = -2\varepsilon_1 \cos \theta \sin \theta + 2\varepsilon_2 \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (101)$$

soit

$$\begin{cases} \varepsilon_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \frac{1}{2} \gamma_{nt} = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad d = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad , \quad r = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (102)$$

À chaque facette \vec{n} , nous pouvons associer un point $(\varepsilon_n, \gamma_{nt}/2)$ dans un repère orthonormé. Lorsque θ varie, ce point décrit le cercle de centre $(d, 0)$ et de rayon r (figure 15).

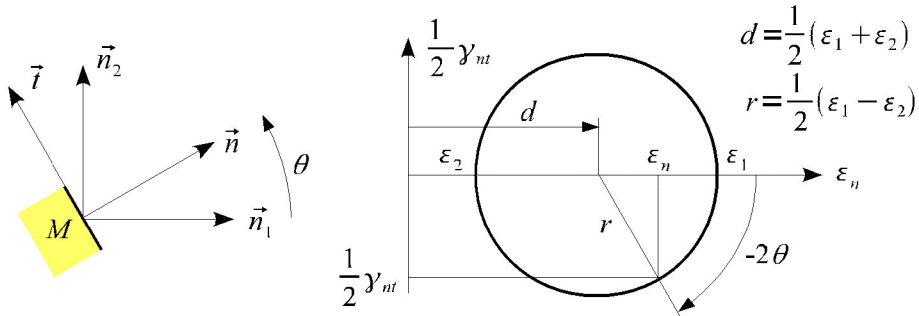


Figure15 – Cercle de Mohr des déformations