



UNIVERSITE BATNA 2  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



**Support de cours**

# **Méthodes numériques appliquées**

**Spécialité : M1- ERM**

Dr A. BENHIZIA

# I. Méthodes directes de la résolution des systèmes linéaires

## Définitions

- On appelle système de n équations linéaires à p inconnues  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  le système :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

### Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{np} X_p = B_n$$

avec  $X_p$  et  $B_n$  deux matrices colonnes et A appelée matrice de transformation à n lignes et p colonnes.

avec Les coefficients  $a_{ij} \quad 1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ . Les  $b_j \quad 1 \leq i \leq n$

constituent le second membre de (S).

Le système est dit **homogène** si  $b_i = 0$  et **non homogène** si  $b_i \neq 0$ .

Les lignes sont numérotées par  $(L_i)$ .

- On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système d'équations linéaires, les opérations suivantes :
  - Multiplication par un scalaire k :  $(L_i) \leftarrow k(L_i)$
  - Permutation de deux lignes :  $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$
  - Addition à une ligne, d'un multiple d'une autre ligne :  $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j) \quad \lambda \quad *$

**Propriété** : Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système d'équations linéaires transforme ce dernier en un système équivalent ayant le même ensemble de solutions.

### I.1 Methode de CRAMER

- On appelle **système de Cramer** un système de n équations à n inconnues avec  $|A| \neq 0$  (déterminant de la matrice carrée de transformation).

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n & (L_n) \end{cases}$$

### Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{nn} X_n = B_n$$

avec  $X_n$  et  $B_n$  les matrices colonnes et A la matrice carrée de transformation

## Méthodes de résolution

Un système de Cramer admet une solution unique donnée par :

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } |A| \neq 0$$

$|A_i|$  étant le déterminant de la matrice  $A_i$  obtenu en remplaçant la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  par la colonne des constantes  $b$ .

## II.2 Pivot de Gauss

Etant donné le système d'équations linéaires :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (L_2) \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

## Méthodes de résolution

La méthode du pivot de Gauss, consiste à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes ( $L_j$ ), à se ramener à un **système triangulaire** (ou système échelonné) de la forme :

$$(S') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (L_1) \\ \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \quad (L'_2) \\ \dots \\ \alpha_{nn}x_n = \beta_n \quad (L'_n) \end{cases}$$

La dernière équation ( $L'_n$ ) donne la valeur de  $x_n$ , puis  $x_{n-1}$  dans ( $L'_{n-1}$ ) après report de  $x_n$  dans cette ligne et ainsi de suite jusqu'à la valeur  $x_1$  dans ( $L_1$ ).

## I.3 FACTORISATION LU

La décomposition LU est une méthode pour résoudre un système linéaire  $[A] \cdot \{x\} = \{b\}$

- on exprime  $A$  sous la forme  $A=L \cdot U$ , ( $L$  = triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale ;

$U$  = triangulaire supérieure),  $[L] \cdot [U] \cdot \{x\} = \{b\}$  et l'on résout  $L \cdot Y = b$  puis  $U \cdot X = y$ .

## II. Résolution des systèmes d'équations non-linéaires

Un système général de n équations à n inconnus  $x_1, \dots, x_n$  peut se mettre sous la forme

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i=1, \dots, n$$

Avec  $f_1, \dots, f_n$ , sont des fonctions à n variables, ou sous la forme vectorielles  $F(X) = 0$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

### II.1. METHODE DE NEWTON-RAPHSON

La méthode de Newton pour un système d'équation non linéaire donne une approximation à la solution exacte du problème. elle consiste à crée une suite de vecteurs  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$  tel que:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J^{-1}(x^{(k-1)}) * F(x^{(k-1)})$$

- Le calcul est alors relancé avec le nouveau couple  $(x_k, x_k)$  afin d'approximer le couple  $(x_{k+1}, x_{k+1})$  et le processus sera répéter jusqu'à ce que  $dx$  deviennent inférieures à une valeur  $e$  que l'on se donne (selon la précision voulue pour le calcul).

- Pour déterminer la k<sup>ème</sup> itération  $x^{(k)}$  approximant la solution exacte du système non linéaire, nous procédons de la manière suivant :

**1. calculer  $Dx^{(k)}$  donné par :**

$$Dx^{(k)} = -J^{-1}(x^{(k-1)}) * F(x^{(k-1)})$$

La matrice  $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$  est appelé Jacobiennes du système.

**2. calculer  $x^{(k)}$  donne par :**

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + Dx^{(k)}$$

En utilisant le couple (1.5,3.5) :

- Déterminer la k<sup>ème</sup> itération approximant la solution du système non linéaire : (k=6)

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 - 10 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 + 3x_1 x_2^2 - 57 = 0 \end{cases}$$

## II. Résolution des systèmes d'équations non-linéaires

### **II.2. METHODE DE POINT FIXE**

Nous pouvons adapter la méthode de point fixe utilisé pour la résolution d'une équation non linéaire à un système d'équations non linéaire, par extraction d'une seule variable d'une des équations de façon à obtenir les schémas suivants :

$$x_1 = G_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_2 = G_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_n = G_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ensuite on passe au schéma de récurrence suivant :

$$X^{k+1} = G(X^k)$$

$$x_1^{k+1} = G_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$

$$x_2^{k+1} = G_2(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$

.....

$$x_n^{k+1} = G_n(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$

Avec :  $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$  connue ou donné.

En utilisant le couple (-2,1) :

- Déterminer la k<sup>ème</sup> itération approximant la solution du système non linéaire : (k=6)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ e^x + y = 1 \end{cases}$$

### III. PRINCIPALES METHODES NUMERIQUES DE DISCRETISATION

#### III.1. Méthode des différences finies

L'objectif de la méthode des différences finies (MDF) est de transformer une équation continue valable sur un domaine continu en un système à  $N$  équations à  $N$  inconnues associées à un domaine discret appelé maillage. (Fig. 3.1).

L'approximation des dérivées d'une fonction  $f(x)$  par différences finies est basée sur le développement en séries de Taylor de cette fonction de la manière suivante :

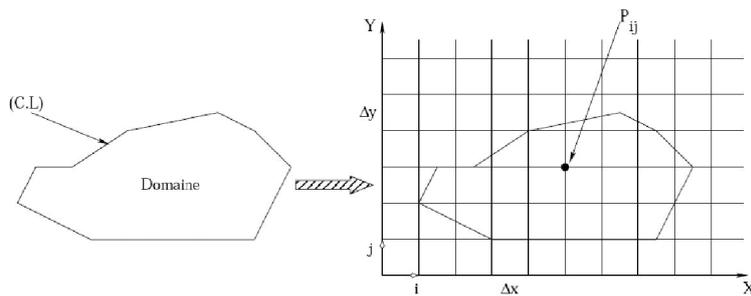


Fig. 3.1: *Passage du domaine continu au domaine discret.*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \quad (3.1)$$

$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \dots \quad (3.2)$$

$$f(x+2h) = f(x) + \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \quad (3.3)$$

$$f(x-2h) = f(x) - \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \dots \quad (3.4)$$

la méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

##### III.1.1. Notation indicielle -cas 1 D:

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur  $u(x)$  sur l'intervalle  $[0,1]$ . La recherche d'une discrète de la grandeur  $u$  amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de  $N+1$  points  $x_i$  pour  $i=0, \dots, N$  régulièrement espacés avec un pas  $\Delta x$ .

Les points :

$x_i = i \cdot \Delta x$  sont appelés les nœuds du maillage.

- Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie sera mène ainsi à la recherche de N valeurs discrète de cette grandeur aux différents nœuds du maillage.

#### - Notation

\* On note  $u_i$  la valeur discrète de  $u(x)$  au point  $x_i$ , soit  $u_i = u(x_i)$ .

De même pour la dérivée de  $u(x)$  au nœud  $x_i$ , on note:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_i} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u'_i.$$

**Remarque:** Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toute les dérivées d'ordre successif de la grandeur  $u$ .

### III.1.2. Schéma aux différences finies d'ordre 1

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présente au dessus s'écrit, en notation indicielle:

#### a) Schéma «avant» ou «décentré avant»

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

#### a) Schéma «arrière»

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

### III.1.3. Schéma d'ordre supérieur

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de  $x_i$ . On écrit:

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

- La soustraction de ces deux relations donne:

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

Ce qui permet d'obtenir le **schéma d'ordre deux dit «centré»** pour approximer la **dérivée première** de  $u$ :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de  $x_i$ . Le nombre de points nécessaires à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences **finies d'ordre 3 pour la dérivée première** s'écrit:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

### III.1.4. Dérivée d'ordre supérieur:

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de  $x_i$ . Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la **dérivée seconde** de  $u$ , on écrit:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ u_{i-1} &= u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4) \end{aligned}$$

- En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à:

$$u_{i+1} - u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma **d'ordre deux dit «centré»** pour approximer la **dérivée seconde** de  $u$ :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les **dérivées deuxième, troisième, etc...**

### III.1.5. Quelques schémas en 1D:

Différences finies avant, ordre 1

	$u_i$	$u_{i+1}$	$u_{i+2}$	$u_{i+3}$	$u_{i+4}$
$\Delta x u'_i$	-1	1			
$\Delta x^2 u''_i$	1	-2	1		
$\Delta x^3 u'''_i$	-1	3	-3	1	
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies arrière, ordre 1

	$u_{i-4}$	$u_{i-3}$	$u_{i-2}$	$u_{i-1}$	$u_i$
$\Delta x u'_i$				-1	1
$\Delta x^2 u''_i$			1	-2	1
$\Delta x^3 u'''_i$		-1	3	-3	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 2

	$u_{i-2}$	$u_{i-1}$	$u_i$	$u_{i+1}$	$u_{i+2}$
$2\Delta x u'_i$		-1		1	
$\Delta x^2 u''_i$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u'''_i$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 4

	$u_{i-3}$	$u_{i-2}$	$u_{i-1}$	$u_i$	$u_{i+1}$	$u_{i+2}$	$u_{i+3}$
$12\Delta x u'_i$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u''_i$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u'''_i$	-1	-8	13	0	-13	8	-1
$6\Delta x^4 u^{(4)}_i$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

### III.1.8. APPROXIMATION DE DERIVEES PAR DIFFERENCES DIVISEES EN DIMENSION SUPERIEURES

#### 4. APPROXIMATION DE DÉRIVÉES PAR DIFFÉRENCES DIVISÉES EN DIMENSION SUPÉRIEURES

L'extension des formules d'approximation des dérivées aux dimensions 2 et 3 est naturelle et aisée. Par contre leur utilisation dans le cadre des schémas aux différences finies sera restreinte aux géométries de formes régulières dans le sens où les bords doivent parallèles à l'un des axes. En pratique, les formes les plus complexes envisageables seront tout au plus un assemblage de parallépipèdes.

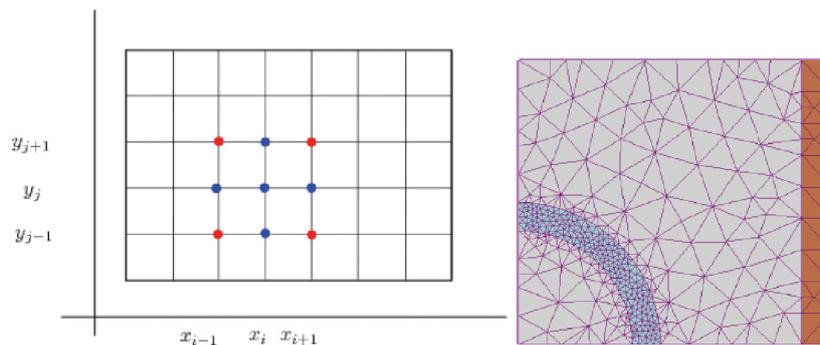


FIGURE 4.1. (G) Maillage régulier compatible avec les D.F. (D) Maillage Elements Finis de type "déstructuré".

On considère par la suite une discrétisation uniforme dans chaque direction; on notera  $\Delta x$  le pas de discrétisation selon l'axe des  $x$ ,  $\Delta y$  celui selon l'axe des  $y$  et  $\Delta z$  celui selon l'axe des  $z$ . Les points du maillage sont de coordonnées  $(x_i, y_j, z_k)$ .

Nous présentons ci-dessous l'extension obtenue dans le cas de la dimension  $n = 2$ . L'extension au cas  $n = 3$  est aisé.

On note  $u_{ij}$  l'approximation de la valeur exacte  $u(x_i, y_j)$  au point d'indice  $(i, j)$  du maillage.

Comme dans le cas 1d, en écrivant des DL de Taylor de la fonction au point  $(x_i, y_j)$ , et en les combinant, on obtient les formules aux différences finies suivantes.

### Dérivées premières.

- Les formules aux différences finies décentrées à droite:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{\Delta x}[u_{i+1,j} - u_{i,j}] \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{\Delta y}[u_{i,j+1} - u_{i,j}], \text{ ordre } 1$$

- Les formules aux différences finies décentrées à gauche:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{\Delta x}[u_{i,j} - u_{i-1,j}] \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{\Delta y}[u_{i,j} - u_{i,j-1}], \text{ ordre } 1$$

- Les formules aux différences finies centrées:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{2\Delta x}[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}] \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{2\Delta y}[u_{i,j+1} - u_{i,j-1}], \text{ ordre } 2$$

**Opérateur d'ordre deux.** La formule aux différences finies à 5 points pour approcher le laplacien s'écrit:

$$\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{1}{\Delta x^2}[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}] + \frac{1}{\Delta y^2}[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}], \text{ ordre } 2$$

## METHODE DE DISCRETISATION

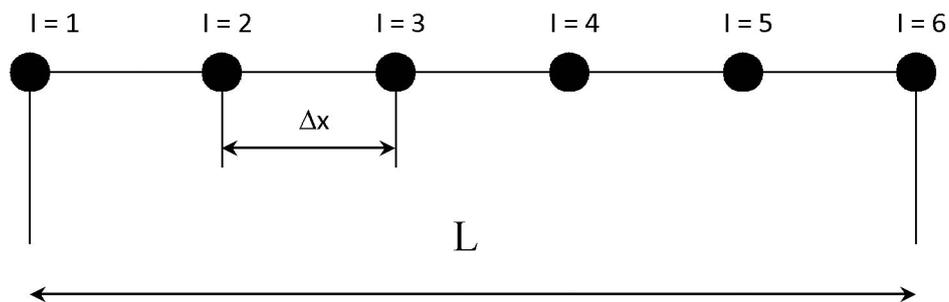
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1)$$

### LE PROBLEME STATIONNAIRE

Si en plus le problème est stationnaire, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

Le problème sera complété par la pose des conditions aux limites.



**L** Longueur du fil.

**NI = 6** Nombre de nœuds du maillage.

Les conditions aux limites seront du type Dirichlet :

$$\theta(1) = 1, \quad \theta(NI) = 0 \quad (3)$$

$$\text{On calcul } \Delta x \text{ par l'expression suivante : } \Delta x = L / (NI - 1) \quad (4)$$

et on génère la grille de calcul par la portion de programme :

```
x(1) = 0.0
Do I=2,NI
x(i) = x(i-1)+Δx
enddo
```

L'équation (2) sera discrétisée par un schéma centré de second ordre :

$$\frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (5)$$

Le nombre de nœuds global étant 6 dont deux sont réservés pour les conditions aux limites et quatre sont à calculés par la méthode des différences finies.

L'application de l'équation algébrique (5) aux quatre nœuds donne le système suivant :

$$l=2 \quad \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 = 0 \quad \text{soit} \quad -2\theta_2 + \theta_3 = -1 \quad (6)$$

$$l=3 \quad \theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4 = 0 \quad (7)$$

$$l=4 \quad \theta_3 - 2\theta_4 + \theta_5 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_3 - 2\theta_4 + \theta_5 = 0 \quad (8)$$

$$l=5 \quad \theta_4 - 2\theta_5 + \theta_6 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_4 - 2\theta_5 = 0 \quad (9)$$

Mathématiquement parlant, on dispose d'un système de quatre équations à quatre inconnus :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ce type de matrice est appelée, matrice tri diagonal et elle est facilement résolu par la méthode du pivot (triangulation).

**Solution :**

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-5\theta_5 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_5 = 0.2$$

$$-4\theta_4 + 3\theta_5 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_4 = 0.4$$

$$-3\theta_3 + 2\theta_4 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_3 = 0.6$$

$$-2\theta_2 + \theta_3 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_2 = 0.8$$

On a aussi :  $\theta_1 = 1$  et  $\theta_6 = 0$

Il est clair que la solution est une droite en parfaite concordance avec la conduction thermique uni directionnelle qui possède un caractère linéaire.

**Remarque :** La solution de ce type de problème est possible analytiquement (deux intégrations successives) et la solution est celle d'une ligne droite.

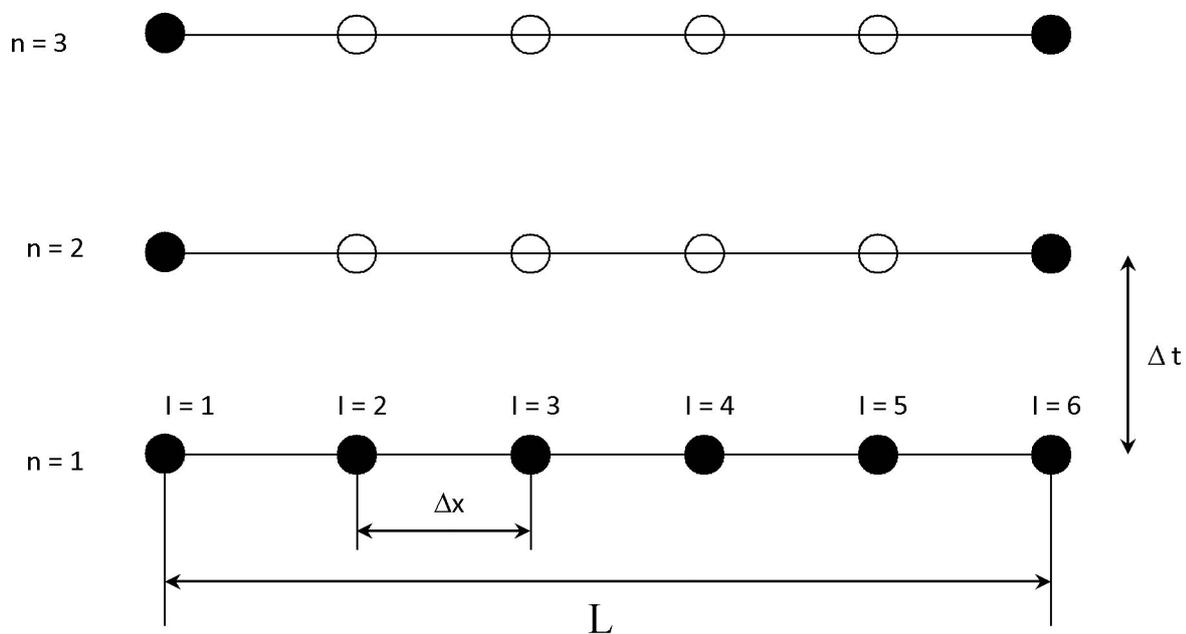
## LE PROBLEME NON-STATIONNAIRE

On reprend l'équation (1)

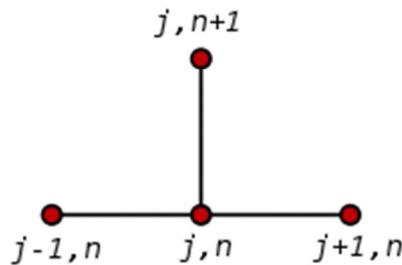
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dans ce genre de problème, en plus des conditions aux limites on a besoin des conditions initiales. C'est à dire une distribution initiale de la solution pour le temps zéro. Les variables auront deux indices : le premier se rapportant au temps et le deuxième à l'espace.

$U(t, x) \equiv U(n.\Delta t, i\Delta x)$  sera représentée par  $U_i^n$ .



## Schéma explicite



L'équation précédente sera approximer par le schéma suivant :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \partial(\Delta t) = a \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \partial(\Delta x^2) \quad (11)$$

On remarque qu'on a utilisé un schéma avant d'ordre un pour la dérivée par rapport au temps et un schéma centré d'ordre deux pour la dérivée par rapport à l'espace.

Lors de cette discrétisation nous avons choisi de prendre les termes de droites au temps  $n$ . ce schéma s'appelle un schéma **explicite**, puisqu'il permet de formuler l'expression de la variable au point  $i$  et à l'instant  $n+1$  explicitement en fonction de la solution déjà calculée au temps  $n$ . Ce schéma est représenté par la molécule suivante.

L'équation (11) sera arrangée comme suit :

$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda U_{i+1}^n \quad (12)$$

$$\text{avec } \lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (13)$$

L'équation (12) sera appliqué aux nœuds d'une même rangé (c.a.d.  $n = cste$ ).

Reprenons le problème de conduction de la température précédent  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$  et posons

les conditions aux limites suivantes ( $\theta(t,0) = 1.0, \theta(t,1) = 0.0$ ) et les conditions initiales ( $\theta(0,x) = 0.0$  pour  $0 < x < 1$ )

Si on reprend le même nombre de nœuds que précédemment (NI=6) le pas d'espace sera  $\Delta x = 0.2$

**Cas 1:**  $\Delta t = 0.1$  ( $\lambda = 2.5$ )

x	.0000	.2000	.4000	.6000	.8000	1.0000
1	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	1.0000	2.5000	.0000	.0000	.0000	.0000

3 1.0000 -7.5000 6.2500 .0000 .0000 .0000

A ce niveau, on peut arrêter les calculs puisqu'on remarque que les résultats numériques de la prédiction ne peuvent être acceptés physiquement. En l'absence de source de chaleur les valeurs de la température doivent être bornées par les conditions aux limites, pire encore on voit apparaître des valeurs négatives de la température adimensionnelle. On conclue que le schéma numérique n'est pas stable puisqu'il amplifie les erreurs introduites par les conditions initiales.

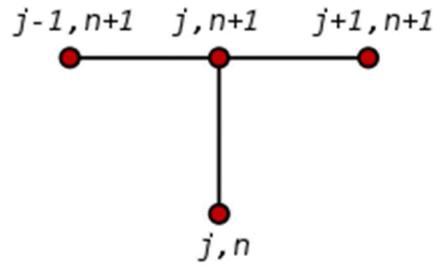
**Cas 2:**  $\Delta t = 0.01$  ( $\lambda = 0.25$ )

x .0000 .2000 .4000 .6000 .8000 1.0000

1	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	1.0000	.2500	.0000	.0000	.0000	.0000
3	1.0000	.3750	.0625	.0000	.0000	.0000
4	1.0000	.4531	.1250	.0156	.0000	.0000
5	1.0000	.5078	.1797	.0391	.0039	.0000
6	1.0000	.5488	.2266	.0654	.0117	.0000
7	1.0000	.5811	.2668	.0923	.0222	.0000
8	1.0000	.6072	.3018	.1184	.0342	.0000
9	1.0000	.6291	.3323	.1432	.0467	.0000
10	1.0000	.6476	.3592	.1663	.0591	.0000

D'après les résultats ci-dessus, on remarque que la première variante avec  $\Delta t = 0.1$  est instable. Elle ne peut pas aboutir à une solution raisonnable. Alors qu'avec  $\Delta t = 0.01$  le processus est stable. **Conclusion :** la stabilité d'un schéma explicite n'est pas toujours assurée.

## Schéma implicite



Reprenons le problème de la conduction thermique non stationnaire et re écrivons l'équation discrète (11) comme suit (les termes de droite sont au temps  $n+1$ )

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \hat{c}(\Delta t) = a \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \hat{c}(\Delta x^2) \quad (14)$$

Après groupement et arrangement :

$$\lambda U_{i-1}^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_i^{n+1} + \lambda U_{i+1}^{n+1} = -U_i^n \quad (15)$$

Cette équation présente trois inconnus en même temps, ce qui ne permet pas de la résoudre directement comme c'était le cas pour le schéma explicite. Cette forme de discrétisation est appelée schéma **implicite**. Pour trouver la solution il faut écrire l'ensemble des équations issues de l'application de (15) sur tous les nœuds de la même ligne et ensuite résoudre le système tout entier.

Si nous reprenons l'exemple précédent composé de six nœuds, le système s'écrira :

$$\begin{aligned} i = 2 & \quad -(1 + 2\lambda)U_2^{n+1} + \lambda U_3^{n+1} = -U_2^n - \lambda U_1 \\ i = 3 & \quad \lambda U_2^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_3^{n+1} + \lambda U_4^{n+1} = -U_3^n \\ i = 4 & \quad \lambda U_3^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_4^{n+1} + \lambda U_5^{n+1} = -U_4^n \\ i = 5 & \quad \lambda U_4^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_5^{n+1} = -U_5^n - \lambda U_6 \end{aligned}$$

$U_1$  et  $U_6$  sont connues et représentent les conditions aux limites.

On dispose maintenant d'un système de quatre équations à quatre inconnus.

$$\begin{bmatrix} -(1+2\lambda) & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -(1+2\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -(1+2\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -(1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_2^* - \lambda \\ -U_3^* \\ -U_4^* \\ -U_5^* \end{bmatrix}$$

Les variables de type  $U_i^*$  représentent la solution numérique à l'itération précédente. La solution de ce système donne directement la solution de l'équation. On constate que l'adoption de n'importe quelle valeur du paramètre  $\lambda$  aboutit à une solution numérique stable. On conclue que le schéma implicite est inconditionnellement stable.