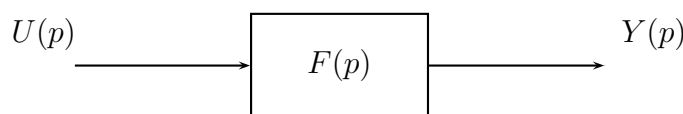


Chapitre 2

Analyse d'un asservissement Approche fréquentielle

2.1 Caractérisation de la stabilité d'un S.L.I. (Rappel)

2.1.1 A partir de l'examen des pôles de la fonction de transfert



$$Y(p) = F(p)U(p) + \underbrace{\frac{I(p)}{D_F(p)}}_{\text{rép. engendrée par les C.I.}}$$

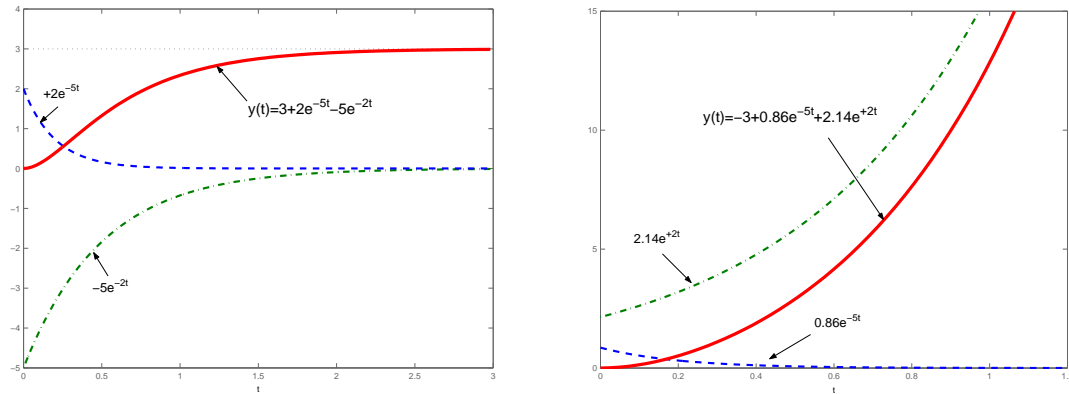
Il faut et il suffit que les pôles de $F(p)$ soient à partie réelle strictement négative pour que toute entrée $u(t)$ bornée se transforme en une sortie $y(t)$ bornée (\forall C.I.).

Ex. $F(p) = \frac{30}{(p+5)(p+2)}$
 Les pôles de $F(p)$ sont -2 et -5 . Si $U(p) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{u_0}{p}$ (bornée) et si les conditions initiales sont nulles alors (voir figure 2.1) :

$$Y(p) = \frac{30 u_0}{p(p+5)(p+2)} \implies \underbrace{y(t)}_{\text{bornée}} = u_0 \left(3 + \underbrace{2e^{-5t} - 5e^{-2t}}_{\text{2 modes convergents}} \right) \mathcal{U}(t)$$

Ex. $F(p) = \frac{30}{(p+5)(p-2)}$
 Les pôles de $F(p)$ sont $+2$ et -5 . Si $U(p) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{u_0}{p}$ (bornée) et si les conditions initiales sont nulles alors (voir figure 2.1) :

$$Y(p) = \frac{30 u_0}{p(p+5)(p+2)} \implies \underbrace{y(t)}_{\text{divergente}} = u_0 \left(-3 + \frac{30}{35} e^{-5t} + \underbrace{\frac{30}{14} e^{+2t}}_{\text{mode divergent}} \right) \mathcal{U}(t)$$

FIGURE 2.1 – Illustration de modes convergents et divergents (ici, $u_0 = 1$)

2.1.2 Critère algébrique de Routh

Pour faire l'analyse de la stabilité d'un système, il faut donc calculer les pôles de son modèle fonction de transfert. Cela peut être fastidieux et parfois ces pôles dépendent d'un ou de plusieurs paramètres (*e.g.* d'un gain).

Le critère algébrique de Routh permet de savoir si un polynôme n'a pas de racine à partie réelle positive. Il permet également de conclure sur les conditions que doivent remplir les éventuels paramètres (gain, ...) dans le cas où le polynôme considéré serait fonction de ces derniers.

Considérons le système de fonction de transfert

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

D'après le paragraphe précédent, pour que $F(p)$ soit stable, il faut et il suffit que le polynôme

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

n'admette que des racines à partie réelle strictement négative.

→ Condition nécessaire de stabilité

Les coefficients a_i ($i = 0, \dots, n$) doivent tous être de même signe et non nuls. Cette condition est **nécessaire mais pas suffisante**.

Ex. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Le système de fonction de transfert } F(p) = \frac{k}{p^3 + 7p^2 - 2p + 4} \text{ n'est pas stable; à} \\ \text{cause du coefficients } -2 \text{ présent dans le dénominateur de } F(p), \text{ la condition} \\ \text{nécessaire n'est pas remplie.} \end{array} \right.$

→ Condition nécessaire et suffisante de stabilité

Le modèle de fonction de transfert $F(p)$ sera stable si les coefficients a_i satisfont le critère de Routh.

Table de Routh

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
p^{n-2}	b_1	b_2	\dots	
p^{n-3}	c_1	c_2	\dots	
\vdots				

Avec

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

 \vdots

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

Critère de Routh

- CNS de stabilité : les éléments de la première colonne de la table de Routh sont de même signe ($\neq 0$);
- Le nombre de racines à partie réelle positive du polynôme $D(p)$ est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne de la table de Routh.

Ex .

À partir du critère de Routh, analyser la stabilité des modèles suivants :

$$F_1(p) = \frac{k}{p^4 + 7p^3 + 17p^2 + 17p + 6}$$

$$F_2(p) = \frac{k}{p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 5p + 6}$$

2.2 Stabilité et performance en précision d'un asservissement

2.2.1 Notations

Pour introduire les notations et le vocabulaire nécessaires à l'étude des asservissements, on choisit la boucle fermée simplifiée vue dans le paragraphe 1.2, figure 1.8, que l'on reporte, enrichie de notations, sur la figure 2.2.

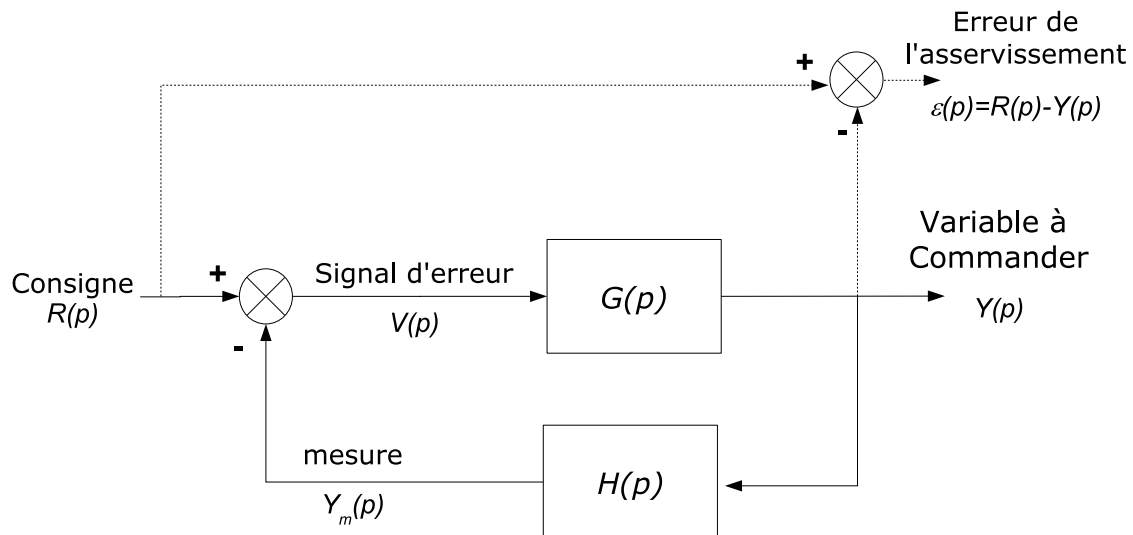


FIGURE 2.2 – Notations pour un système asservi

▷ Chaîne directe

$$G(p) = \frac{Y(p)}{V(p)}$$

où $V(p)$ est appelé le signal d'erreur¹, signal de sortie du comparateur.

▷ Chaîne retour

$$G(p) = \frac{Y_m(p)}{Y(p)}$$

▷ Fonction de transfert en Boucle Ouverte – BO

$$T(p) = G(p) \times H(p)$$

1. ne pas confondre avec l'erreur $\varepsilon(p)$; ces deux valeurs sont toutefois liées et souvent proportionnelles mais pas forcément de même nature.

▷ **Fonction de transfert en Boucle Fermée – BF – système asservi**

$$F(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} = \frac{G(p)}{1 + T(p)}$$

▷ **Erreur de l'asservissement**

$$\begin{aligned}\varepsilon(p) &= R(p) - Y(p) \\ &= (1 - F(p)) R(p)\end{aligned}$$

Ex. | Ecrire la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ de l'asservissement de la figure 1.12 (page 15, paragraphe 1.2).

2.2.2 Analyse de la stabilité d'un asservissement

▷ **Par le critère de Routh**

Considérons un asservissement à retour unitaire (fonction de transfert de la chaîne retour $H(p) = 1$) avec une loi de commande proportionnelle c'est à dire une loi de commande élémentaire pour laquelle le correcteur $D(p)$ est un simple gain variable : $D(p) = k$.

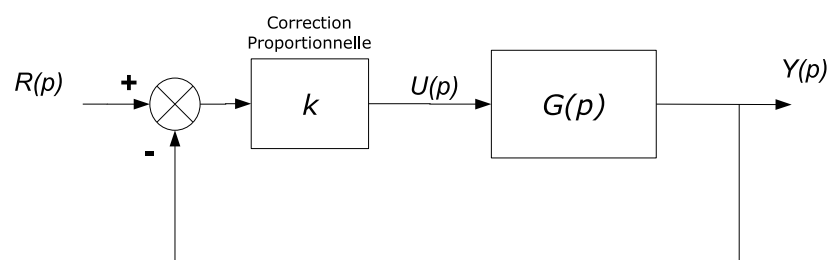


FIGURE 2.3 – Système asservi avec une correction proportionnelle de gain k

Pour connaître la stabilité de l'asservissement, on écrit la fonction de transfert du système en boucle fermée et on applique le critère de Routh.

Pour $G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$, on a :

$$F(p) = \frac{kG(p)}{1 + kG(p)} = \frac{k}{p^3 + 3p^2 + 2p + k}$$

En notant $T(p) = kG(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte, l'équation caractéristique de l'asservissement $1 + T(p) = 0$ s'écrit :

$$p^3 + 3p^2 + 2p + k = 0$$

La stabilité de l'asservissement va dépendre des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$ qui sont les racines de l'équation caractéristique $1 + T(p) = 0$. Nous utilisons le critère de Routh pour connaître quelles conditions doit remplir le gain k pour que l'asservissement soit stable.

→ **condition nécessaire** : tous les coefficients de l'équation caractéristique sont de même signe ;

→ condition nécessaire et suffisante

$$\begin{array}{l|ll} p^3 & 1 & 2 \\ p^2 & 3 & k \\ p^1 & \frac{6-k}{3} & 0 \\ p^0 & k & \end{array}$$

L'asservissement sera stable si

$$\begin{cases} \frac{6-k}{3} > 0 \\ k > 0 \end{cases} \implies 0 < k < 6$$

▷ Par un critère géométrique – le critère du revers

→ Présentation du critère

Les critères géométriques permettent de conclure sur l'existence de pôle(s) de la **Boucle Fermée** $F(p)$ à partie réelle non négative (et donc de conclure sur sa stabilité) à partir de la réponse harmonique de la fonction de transfert en **Boucle Ouverte** $T(p)$.

Le critère présenté dans ce cours (critère du revers) est un critère simplifié du **critère de Nyquist** (hors programme) appliqué lorsque la condition suffisante « aucun élément de la Boucle Ouverte n'admet de pôles à partie réelle strictement positive » est vraie.

■ Énoncé du critère du revers

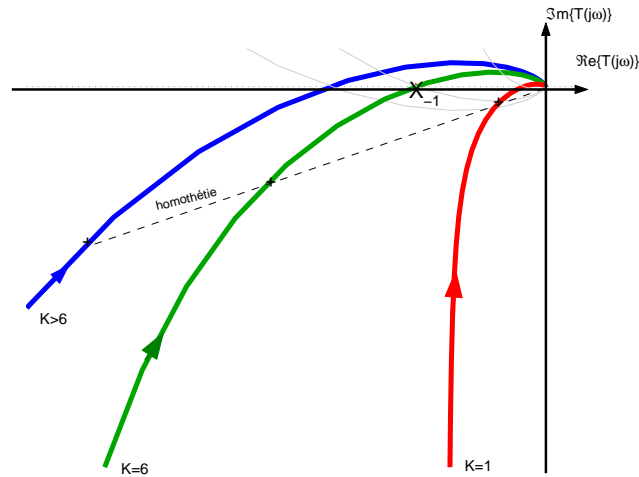
Un système en **Boucle Fermée** dont la fonction de transfert en **Boucle Ouverte** n'admet pas de pôles à partie réelle positive **est stable** si et seulement si en parcourant **le lieu de Nyquist** de la fonction de transfert en **Boucle Ouverte** dans le sens des ω croissants, on laisse le **point critique** $(-1, 0)$ à gauche.

■ Illustration sur l'exemple précédent

La fonction de transfert en Boucle Ouverte

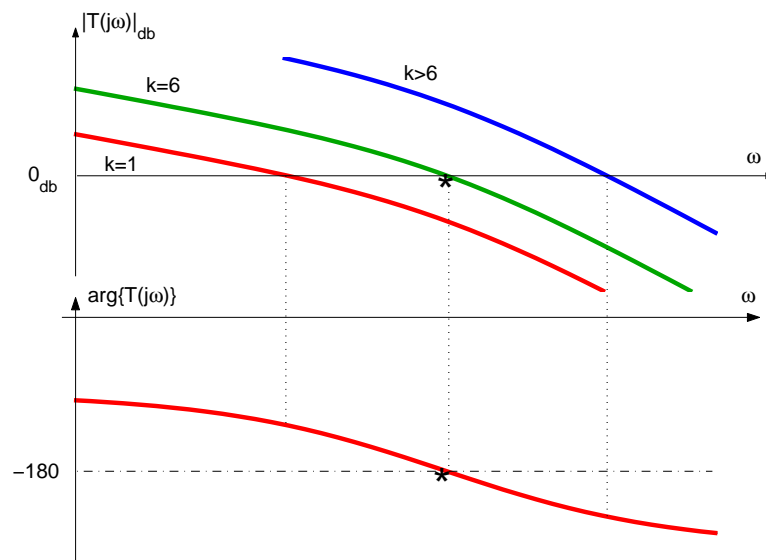
$$T(p) = \frac{k}{p(p+1)(p+2)}$$

remplit la condition d'application du critère du revers. Le lieu de transfert $T(j\omega)$ en Boucle Ouverte est donné sur la figure 2.4 pour différentes valeurs de k représentatives.

FIGURE 2.4 – Critère du revers – tracés de $T(j\omega)$ pour $k = 1$, $k = 6$ et $k > 6$

■ Lecture du critère dans le plan de Bode

Le lieu de transfert $T(j\omega)$ de la boucle ouverte dans le plan de bode est donné, pour l'exemple précédent, sur la figure 2.5.

FIGURE 2.5 – Tracés de $T(j\omega)$ pour $k = 1$, $k = 6$ et $k > 6$ dans le plan de Bode

- \rightsquigarrow Pour $k < 6$, la phase de $T(j\omega)$ lorsque son module $|T(j\omega)|_{db} = 0$ est supérieure à $-180^\circ \rightarrow$ stabilité de la boucle fermée.
- \rightsquigarrow Pour $k = 6$, la phase de $T(j\omega)$ égale -180° pour $|T(j\omega)|_{db} = 0 \rightarrow$ limite de stabilité de la boucle fermée.
- \rightsquigarrow Pour $k > 6$, la phase de $T(j\omega)$ est inférieure à -180° pour $|T(j\omega)|_{db} = 0 \rightarrow$ système asservi instable.

→ Marges de stabilité d'un asservissement

- Intérêt : évaluer le *degré de stabilité* d'un asservissement *i.e.* la proximité avec sa limite de stabilité repérée dans le plan de Bode par le gain O_{db} et la phase -180° (le point $(O_{db}, -180^\circ)$ correspondant au point critique $(-1, 0)$ du plan de Nyquist).
- Cette marge de stabilité amène une notion de *robustesse* de l'asservissement (incertitudes, erreurs de modélisation, ...)

■ Marge de gain (mesurée en dB dans le plan de Bode)

$$M_G = 0_{db} - |T(j\omega_{-180^\circ})|_{db}$$

où ω_{-180° est la pulsation pour laquelle $\arg\{T(j\omega)\} = -180^\circ$; l'illustration est portée sur la figure 2.6.

■ Marge de phase

$$M_\phi = \arg\{T(j\omega_{0db})\} - (-180^\circ)$$

où ω_{0db} est la pulsation pour laquelle $|T(j\omega_{0db})|_{db} = 0$ (voir figure 2.6).

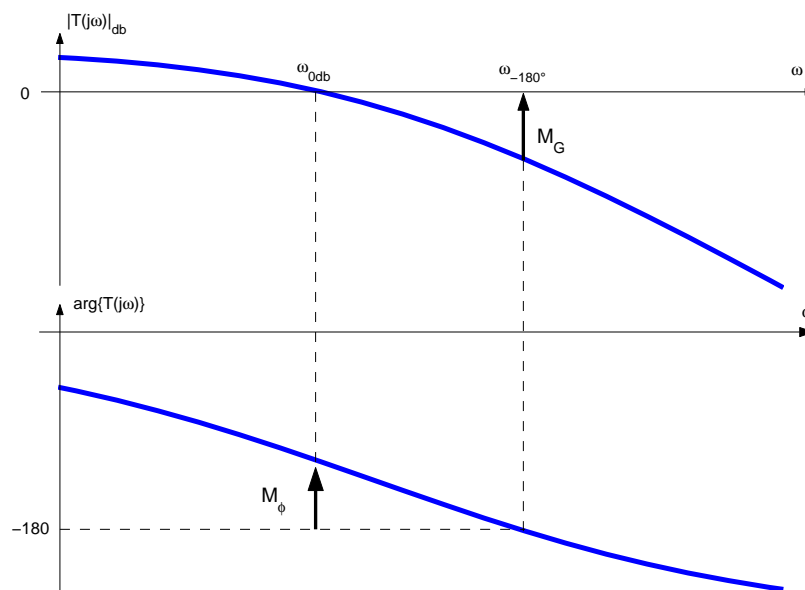


FIGURE 2.6 – Marge de phase et marge de gain mesurées dans le plan de bode

N.B.

Le système asservi est stable si les marges de stabilité, mesurées sur le lieu de transfert en boucle ouverte, sont positives : $M_\phi > 0$ (↑) et $M_G > 0$ (↑).

Attention à l'orientation des marges sur le lieu de transfert.

Valeurs *couramment* rencontrées pour de *bonnes performances* d'un asservissement : M_ϕ de l'ordre de 45° et M_G au delà de $5db$.

Application Matlab

La commande `margin` permet d'obtenir la réponse harmonique d'une fonction de transfert dans le plan de Bode sur lequel sont reportées les marges de phase et de gain. La commande `margin` n'a de sens que si la fonction de transfert considérée est la fonction de transfert en boucle ouverte!

```
>> margin(T)
```

A titre d'information, les marges de stabilité mesurées sur le lieu de transfert dans le plan de Black, sont reportées sur la figure 2.7.

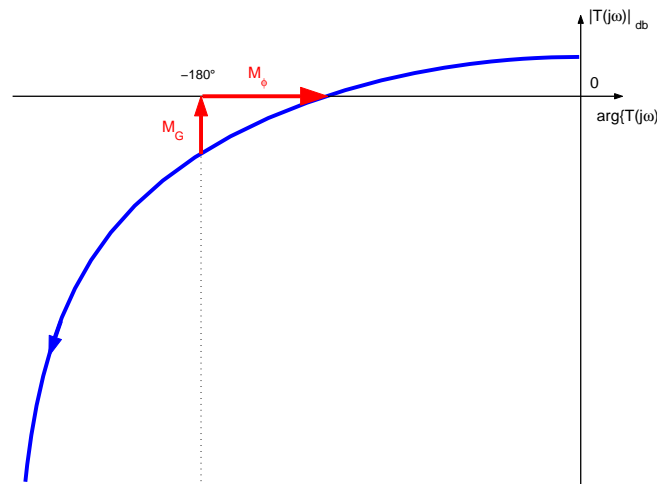


FIGURE 2.7 – Marge de phase et marge de gain mesurées dans le plan de Black

N. B. | le lieu représenté sur la figure 2.7 ne correspond pas à l'exemple $T(p) = \frac{k}{p(p+1)(p+2)}$. Pour vous entraîner, tracer le lieu de transfert de $T(p)$ dans le plan de Black pour $k = 1$, $k = 6$ et $k > 6$ et y reporter les marges de stabilité.

2.2.3 Performances en précision d'un asservissement

Les asservissements considérés ici sont asymptotiquement stables; on recherche la valeur de l'erreur en régime permanent.

▷ Calcul de l'erreur

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= r(t) - y(t) \\ \varepsilon(p) &= R(p) - Y(p) \\ &= (1 - F(p)) R(p)\end{aligned}$$

A partir de l'expression de $\varepsilon(p)$ et du théorème de la valeur finale, on peut en déduire l'erreur en **régime permanent** :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

N.B. | Cette limite n'a de sens physique que si $p\varepsilon(p)$ admet uniquement des pôles à partie réelle négative.

▷ **Cas particulier d'un asservissement à retour unitaire**

Prenons l'asservissement à retour unitaire avec une correction de fonction de transfert $D(p)$ (figure 2.8).

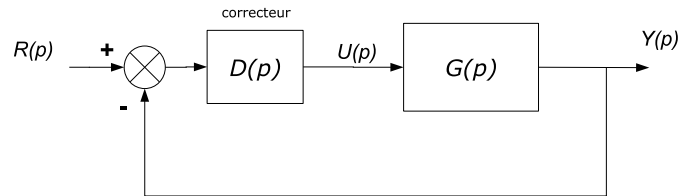


FIGURE 2.8 – Système asservi avec un correcteur de fonction de transfert $D(p)$

Soit α le nombre d'intégrations pures (nombre de pôles en 0) de la fonction de transfert de la chaîne directe $D(p)G(p)$.

- Cas $\alpha = 0$: $G(p)$ ne contient pas d'intégration (on parle d'asservissement de type 0) Soit $K = D(0)G(0)$ le gain statique ; il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p = \frac{r_0}{1+K} \\ \varepsilon_v = +\infty \\ \varepsilon_a = +\infty \\ \vdots \end{array} \right.$$

- Cas $\alpha = 1$: $G(p)$ contient une intégration (asservissement de type I) Soit $K = pD(0)G(0)$ le gain en vitesse ; il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p = 0 \\ \varepsilon_v = \frac{r_0}{K} \\ \varepsilon_a = +\infty \\ \vdots \end{array} \right.$$

- Cas $\alpha = 2$: $G(p)$ contient deux intégrations (asservissement de type II) Soit $K = p^2D(0)G(0)$ le gain en accélération ; il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p = 0 \\ \varepsilon_v = 0 \\ \varepsilon_a = \frac{r_0}{K} \\ \vdots \end{array} \right.$$

■ ...

▷ Exemples

Ex. | Considérons l'asservissement à retour unitaire de la figure 2.8. Pour $G(p) = \frac{10}{1+7p}$ et $D(p) = \frac{1}{p^\alpha}$.
 Retrouver les résultats du paragraphe précédent pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

Ex. | Considérons l'asservissement de la figure 2.9 pour lequel $G(p) = \frac{2}{7p+1}$,
 $H(p) = \frac{4}{p+2}$ et $D(p) = \frac{1}{p}$.
 Montrer que $\varepsilon_p = \frac{r_0}{2}$ et $\varepsilon_v \rightarrow \infty$.

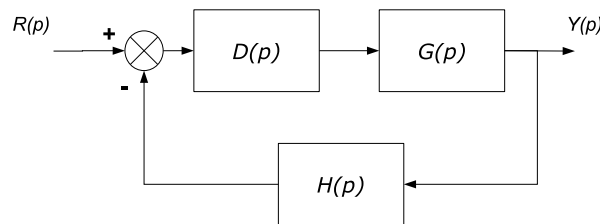


FIGURE 2.9 – Asservissement considéré

2.2.4 Illustration du compromis précision / stabilité à partir d'un exemple

Soit l'asservissement de la figure 2.10 avec $G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$.

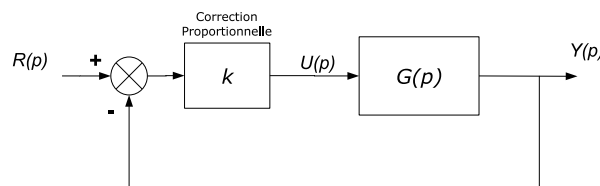


FIGURE 2.10 – Système asservi avec une correction proportionnelle de gain k

1. Donner les expressions de l'erreur de position et de l'erreur de traînage en fonction de k .
2. Comment évolue l'erreur de vitesse lorsque k augmente ?
3. Pour une consigne de type rampe unitaire ($R(p) = \frac{1}{p^2}$), quelle valeur doit prendre le correcteur pour que l'asservissement ait une erreur de vitesse de 0.2 ?
4. Discuter de la stabilité de l'asservissement pour cette valeur de k .