

1.3. – EQUATIONS DE BILANS

1.3.1. – Relations générales entre flux et sources

Les équations générales de la convection peuvent être déduites, soit sous forme intégrale, soit sous forme locale, d'une seule équation générale de bilan.

Donnons-nous un domaine matériel \mathcal{D} , de dimensions finies, et de frontière \mathcal{S} fixe (fig. 1.7). Supposons-le parcouru par une « entité physique » additive, c'est-à-dire telle que dans un système constitué de plusieurs parties, sa valeur totale soit la somme des valeurs de chaque partie. Une telle entité porte le nom de *grandeur extensive*, et peut donc faire l'objet d'un bilan sur le domaine \mathcal{D} ; sa *densité volumique locale* est notée $C = C(x, y, z, t)$.

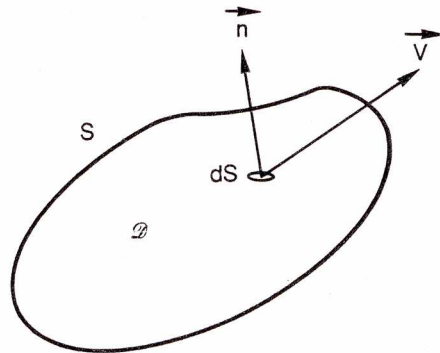


FIG. 1.7. – Domaine \mathcal{D} soumis à un bilan. Sa frontière \mathcal{S} est fixe.

La grandeur considérée peut être en particulier la masse de matière contenue dans \mathcal{D} , sa quantité de mouvement, son énergie, ... C peut donc être une fonction scalaire ou vectorielle.

Toute étude concernant une grandeur extensive repose sur l'établissement de son bilan dans le domaine \mathcal{D} pendant une durée dt .

1.3.1.1. – CAS OÙ C EST UNE GRANDEUR SCALAIRE

Soit K la quantité totale de « l'entité physique » contenue dans \mathcal{D} à l'instant t (en désignant temporairement par $d\tau$ l'élément différentiel de volume) :

$$K = \int_{\mathcal{D}} C d\tau = K(t) \quad (1.20a)$$

La variation de K pendant la durée dt peut résulter de trois causes :

- Tout d'abord, il existe un flux de la grandeur extensive à travers \mathcal{S} , lié au mouvement du support matériel, et représenté par un champ de vecteur $\vec{\phi}_S = C\vec{V}$. Le flux total sur \mathcal{S} a pour valeur :

$$\Phi_S = \int_{\mathcal{S}} \vec{\phi}_S \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathcal{S}} C\vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (1.20b)$$

Bien entendu, $\vec{\phi}_S = 0$ si \mathcal{S} est une paroi matérielle étanche, ou plus généralement si \mathcal{D} est un système fermé.

Dans (1.20b), la normale \vec{n} à dS est orientée comme d'habitude vers l'extérieur du domaine \mathcal{D} . On compte donc :

$$\Phi_S < 0 \text{ à l'entrée, } \Phi_S > 0 \text{ à la sortie} \quad (1.21a)$$

D'autre part, il peut exister des sources de l'entité physique considérée, soit à l'intérieur de \mathcal{D} , soit sur \mathcal{S} (des exemples concrets en seront donnés dans les paragraphes suivants, et récapitulés à la fin du chapitre 2). Appelons $q_I = q_I(x, y, z, t)$ leur débit volumique local dans \mathcal{D} , et $\vec{q}_S = \vec{q}_S(x, y, z, t)$ le vecteur densité de flux surfacique local sur la surface frontière \mathcal{S} .

Le terme q_I est compté > 0 pour une source *stricto sensu* et < 0 pour un puits.

En ce qui concerne \vec{q}_S , on introduit une densité de flux des sources sur \mathcal{S} en posant : $q_S = \vec{q}_S \cdot \vec{n}$. On a donc comme pour Φ_S (1.21a) : $q_S > 0$ à la sortie et < 0 à l'entrée.

Notons Q_S le flux total des sources sur \mathcal{S} et Q_I le débit total des sources de volume :

$$Q_S = \int_{\mathcal{S}} \vec{q}_S \cdot \vec{n} dS ; Q_I = \int_{\mathcal{D}} q_I d\tau \quad (1.21b)$$

Compte tenu des conventions de signes précédentes, si \vec{q}_S ou \vec{V} est dirigé vers l'intérieur de \mathcal{D} , Q_S ou Φ_S est compté négatif, mais contribue à augmenter K , ce qui implique $dK > 0$ (et inversement). Dans le bilan algébrique de la grandeur K sur \mathcal{D} pendant un temps élémentaire dt , Q_S et Φ_S doivent donc être affectés du signe moins :

$$dK = \frac{\partial K}{\partial t} dt = Q_I dt - Q_S dt - \Phi_S dt \quad (1.21c)$$

Il est intéressant de grouper d'un côté la variation de K et le terme de transport, de l'autre les sources. Compte tenu de (1.20b) et (1.21b), la formulation générale du bilan de K sur \mathcal{D} s'établit donc ainsi :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} C d\tau + \int_{\mathcal{S}} C \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathcal{D}} q_I d\tau - \int_{\mathcal{S}} \vec{q}_S \cdot \vec{n} dS} \quad (1.22)$$

Notons dès à présent que, puisque la frontière du domaine \mathcal{D} a été choisie fixe, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} C d\tau = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial C}{\partial t} d\tau$$

et cette formulation sera retenue dans la suite.

Le théorème connu sous le nom de « flux – divergence » permet de transformer les intégrales sur \mathcal{S} en intégrales sur \mathcal{D} , et (1.22) devient :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial C}{\partial t} d\tau + \int_{\mathcal{D}} \text{div}(C \vec{V}) d\tau = \int_{\mathcal{D}} q_I d\tau - \int_{\mathcal{D}} \text{div} \vec{q}_S d\tau \quad (1.23)$$

Cette équation étant valable $\forall \mathcal{D}$, si C est continue, alors :

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C \vec{V}) = q_I - \text{div} \vec{q}_S} \quad (1.24)$$

Rappelons que :

C = densité volumique de la grandeur considérée

q_I = débit volumique des sources dans \mathcal{D}

\vec{q}_S = vecteur densité de flux des sources sur \mathcal{S}

L'équation (1.22) représente un *bilan intégral* sur un domaine \mathcal{D} de dimensions finies et de frontière \mathcal{S} fixe, qui répond en général aux besoins de l'ingénieur. Quant à la relation (1.24), elle exprime un *bilan local*, ou différentiel.

1.3.1.2. – CAS OÙ C EST UNE FONCTION VECTORIELLE

Lorsque l'entité physique faisant l'objet d'un bilan est de nature vectorielle, la transposition du cas précédent est aisée :

- le débit volumique des sources devient une grandeur vectorielle \vec{q}_I ;

- le vecteur densité de flux des sources de surface à travers \mathcal{S} devient une grandeur tensorielle \vec{q}_S , tandis que la densité de flux scalaire devient un vecteur \vec{q}_S ;

- la densité de flux transportée à travers \mathcal{S} par le mouvement du support matériel est $\vec{C} \otimes \vec{V} \cdot \vec{n}$.

Les conventions de signes (1.21a) n'ayant de sens que pour une somme algébrique de scalaires, elles n'ont plus à être prises en compte ici, où l'on effectue une somme vectorielle, et le bilan intégral s'écrit :

$$\boxed{\int_D \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} d\tau + \int_S \vec{C} \otimes \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_D \vec{q}_I d\tau + \int_S \vec{q}_S dS} \quad (1.25)$$

On peut ensuite passer au bilan local comme dans le paragraphe précédent, en écrivant \vec{q}_S sous la forme d'un produit tensoriel contracté, et de même pour $\vec{C} \otimes \vec{V} \cdot \vec{n}$ (§ 1.3.3, bilan de quantité de mouvement).

En projetant sur les axes de coordonnées, on pourra évidemment remplacer (1.25) par trois équations scalaires.

1.3.1.3. – REMARQUES

♣ La technique du bilan sur un domaine fixe présente entre autres avantages celui de ne pas faire intervenir la notion de « dérivée particulaire », et donc d'alléger le raisonnement.

Compte tenu toutefois de l'usage encore largement répandu de la dérivation particulaire, et de son importance historique en mécanique des fluides, cette notion est brièvement présentée et discutée dans l'Annexe 1.A.1, avec les bilans sur les domaines mobiles.

◆ D'autre part, on notera que les équations de bilan local ayant la forme (1.24) sont des équations aux dérivées partielles. Celles – ci ont eu longtemps la faveur des utilisateurs, qui recherchaient des solutions analytiques. Le développement des moyens de calcul numérique permet non seulement d'aller plus loin dans la résolution de telles équations, mais de redonner aussi tout leur intérêt aux équations intégrales, souvent mieux adaptées aux problèmes industriels. C'est le cas des calculs par volumes finis sur des domaines macroscopiques (par exemple pour la simulation des grandes structures turbulentes, cf. § 3.6).

1.3.2. – Bilan de masse

1.3.2.1. – BILAN DE MASSE TOTALE

Nous choisirons comme premier exemple d'entité physique la masse de matière présente dans le domaine \mathcal{D} . Celle-ci étant une grandeur scalaire, la correspondance avec les termes qui interviennent dans (1.22) et (1.24) est alors la suivante :

- $C = \rho$, masse volumique du milieu matériel (en kg/m^3)
- $q_I = 0$ et $\vec{q}_S = 0$, car il ne peut y avoir de sources de masse, en vertu du principe de conservation de la masse totale.

Les équations de bilan intégral et local s'écrivent donc ici :

$$\boxed{\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_{\mathcal{S}} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0} \quad (1.26)$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{V} = 0} \quad (1.27)$$

L'équation (1.27) de bilan local est traditionnellement baptisée *équation de continuité*. Pour un fluide isochore ($\rho = \text{cte}$), on retrouve l'équation (1.12b) :

$$\text{div } \vec{V} = 0$$

L'expression « *débit-masse de fluide à travers une surface \mathcal{S}* » (ou encore *débit massique*) désigne habituellement le terme de transport, c'est-à-dire le flux de masse, noté q_m :

$$q_m = \int_{\mathcal{S}} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{en kg/s}) \quad (1.28)$$

d'où l'interprétation de (1.26) : la variation de masse de \mathcal{D} pendant le temps $dt = I$ est égale au débit – masse à travers \mathcal{S} .

1.3.2.2. – BILAN DE MASSE SUR UN CONSTITUANT

Si le milieu matériel contenu dans \mathcal{D} est un mélange de plusieurs constituants (souvent appelés *espèces* dans le vocabulaire du génie des procédés), on peut aussi établir un bilan de masse sur un seul d'entre eux, noté A . On a dans ce cas :

- $C = \rho_A$, masse volumique du constituant A dans le mélange (en kg/m^3)
- $q_I = q_{IA}$, *taux de production local* de A (en $\text{kg/m}^3 \cdot \text{s}$).

Ici, on pourra avoir $q_{IA} \neq 0$ si le mélange est le siège d'une transformation dans sa composition (réaction chimique, changement de phase). Par exemple, dans la combustion d'un hydrocarbure C_nH_m il apparaît un puits de masse si le bilan porte sur C_nH_m ou sur O_2 ($q_I < 0$), et une source de masse s'il concerne CO_2 ou H_2O ($q_I > 0$). De même, dans un mélange liquide – vapeur en évolution, le bilan de masse sur l'une des deux phases fera intervenir un terme de source $q_I \neq 0$.

- $\vec{q}_S = \vec{q}_{SA}$, *vecteur densité de flux de masse relatif au constituant A* pour les sources de surface, le débit-masse local de ces sources étant $q_{SA} = \vec{q}_{SA} \cdot \vec{n}$ (en $\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}$). Ce terme interviendra si A diffuse dans le mélange (§ 1.3.6.2).

Conformément à (1.22) et (1.24), le bilan intégral et le bilan local de masse pour le constituant A sont donc exprimés par les relations :

$$\int_D \frac{\partial \rho_A}{\partial t} d\tau + \int_S \rho_A \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_D q_{IA} d\tau - \int_S \vec{q}_{SA} \cdot \vec{n} dS \quad (1.29a)$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div} \rho_A \vec{V} = q_{IA} - \text{div} \vec{q}_{SA} \quad (1.29b)$$

1.3.3. – Bilan de quantité de mouvement

1.3.3.1. – CAS GÉNÉRAL

Attachons-nous maintenant à exprimer le bilan de quantité de mouvement sur le domaine \mathcal{D} . Il concerne une grandeur vectorielle, et constitue donc une application de la relation (1.25).

La loi fondamentale de la mécanique stipule que la variation de quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la somme des forces appliquées. En d'autres termes, *les « sources » de quantité de mouvement sont les forces appliquées au système*, qui se divisent en deux catégories :

- les *forces de volume*, représentées par un champ continu $\vec{F}(x, y, z, t)$ sur \mathcal{D} : forces de pesanteur (incluant les forces de flottabilité en convection libre ou mixte), éventuellement forces électromagnétiques dans le cas de fluides chargés électriquement ;
- les *forces de surface* sur \mathcal{S} : champ des contraintes de surface \vec{T} (1.13), forces de tension superficielle si \mathcal{S} est la surface frontière entre deux phases dans un mélange polyphasique, ou entre deux constituants non miscibles dans un mélange hétérogène.

On a donc, dans (1.25) :

- $\vec{C} = \rho \vec{V}$, quantité de mouvement volumique (en N.s/m³)
- $\vec{q}_I = \rho \vec{F}$ pour les sources volumiques (soit $\rho \vec{g}$ en ne considérant que les forces de pesanteur) (en N/m³ pour q_I , en N/kg pour F)
- $\vec{q}_S = \vec{T} = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n}$ si le fluide est homogène (en Pa)

La quantité de mouvement transportée par le fluide à travers \mathcal{S} s'écrit :

$$\int_S \rho \vec{V} \otimes \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_S \overline{\overline{P}} \cdot \vec{n} dS \quad (1.30a)$$

où $\overline{\overline{P}} = \rho \vec{V} \otimes \vec{V}$ est le *tenseur des quantités de mouvement*, de composantes :

$$P_{ij} = \rho V_i V_j \quad (\text{en Pa})$$

soit encore :

$$\overline{\overline{P}} = \rho \begin{pmatrix} U^2 & UV & UW \\ VU & V^2 & VW \\ WU & WV & W^2 \end{pmatrix} \quad (1.30b)$$

L'expression du bilan intégral (1.25) est alors :

$$\boxed{\int_D \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\tau + \int_S \overline{\overline{P}} \cdot \vec{n} dS = \int_D \rho \vec{F} d\tau + \int_S \vec{T} dS} \quad (1.31)$$

où les termes du second membre représentent la somme des forces extérieures à \mathcal{D} : résultante des forces de volume et résultante des actions de contact sur \mathcal{S} .

Lorsque les seules forces de volume en jeu sont les forces de pesanteur ($\vec{F} = \vec{g}$), leur résultante est le poids du fluide contenu dans \mathcal{D} :

$$\int_D \rho \vec{g} d\tau = m \vec{g}$$

Passant maintenant au bilan local de quantité de mouvement, et sachant que $\vec{T} = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n}$, on obtient à partir de (1.31), si le champ de vitesse \vec{V} est continu :

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \text{div} \overline{\overline{P}} = \rho \vec{F} + \text{div} \overline{\overline{T}} \quad (1.32)$$

avec, d'après l'Annexe 1.A.2 :

$$\text{div} \overline{\overline{P}} = \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V} \cdot \rho \vec{V} + \vec{V} \text{div}(\rho \vec{V}) \quad (1.33a)$$

expression où l'on retrouve le tenseur gradient du champ des vitesses $\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}$ (1.7). Les termes $\text{div} \overline{\overline{P}}$ et $\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V} \cdot \rho \vec{V}$ sont des vecteurs, le second ayant pour composantes :

$$\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}} \cdot \rho \vec{V}} = \begin{pmatrix} \rho \vec{V} \cdot \overline{\text{grad} U} \\ \rho \vec{V} \cdot \overline{\text{grad} V} \\ \rho \vec{V} \cdot \overline{\text{grad} W} \end{pmatrix} \quad (1.33b)$$

(dans le deuxième membre, l'usage est de mettre \vec{V} en premier, ce qui est permis par la commutativité du produit scalaire).

Si la viscosité dynamique μ varie peu ($\mu \approx \text{cte}$), l'expression de $\overline{\text{div} \vec{T}}$ s'écrit quant à elle (Annexe 1.A.2) :

$$\overline{\text{div} \vec{T}} = - \overline{\text{grad} p} + \mu \left(\Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \overline{\text{grad} \text{div} \vec{V}} \right) \quad (1.33c)$$

où $\Delta \vec{V}$ est le *laplacien vectoriel* du champ de vitesse : $\Delta \vec{V} = \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta V \\ \Delta W \end{pmatrix}$ (1.33d)

Reportant (1.33 a et c) dans (1.32), on aboutit à l'équation vectorielle :

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}} \cdot \rho \vec{V}} + \vec{V} \text{ div} \rho \vec{V} = \rho \vec{F} - \overline{\text{grad} p} + \mu \left(\Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \overline{\text{grad} \text{div} \vec{V}} \right) \quad (1.34)$$

A condition que le bilan de quantité de mouvement porte sur la totalité de la matière contenue dans \mathcal{D} , le recours à l'équation de continuité : $\text{div} \rho \vec{V} = - \partial \rho / \partial t$ permet enfin une simplification de l'équation de bilan, et il vient :

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}} \cdot \rho \vec{V}} = \rho \vec{F} - \overline{\text{grad} p} + \mu \left(\Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \overline{\text{grad} \text{div} \vec{V}} \right)} \quad (1.35)$$

On retrouve bien entendu le cas particulier de l'*hydrostatique* (fluide immobile dans le champ de pesanteur) en faisant $\vec{V} = 0$ et $\vec{F} = \vec{g}$. Il reste :

$$\overline{\text{grad} p} = \rho \vec{g} \quad (1.36a)$$

soit, avec un axe \vec{z} dirigé vers le haut :

$$\boxed{dp = - \rho g dz} \quad (1.36b)$$

Un autre cas particulier d'importance historique, le mouvement d'un fluide parfait isochore sans champ de force extérieur, est décrit par l'*équation d'Euler* (1755) :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}} \cdot \vec{V}} = - \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad} p} \quad (1.36c)$$

1.3.3.2. – CAS PARTICULIER : FLUIDE ISOCHORE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

Le plus souvent, on est amené à travailler sur des écoulements dans lesquels le fluide peut être supposé isochore ($\rho = cte$, $div \vec{V} = 0$), et où $\rho \vec{F} = \rho \vec{g}$.

C'est alors qu'il est habile de grouper les termes de pression et de pesanteur en posant :

$$\overrightarrow{grad} p^* = \overrightarrow{grad} p - \rho \vec{g} \quad (1.37a)$$

La grandeur p^* ainsi définie est la « *pression motrice* », et le bilan (1.35) devient :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \vec{V} \cdot \rho \vec{V} = - \overrightarrow{grad} p^* + \mu \Delta \vec{V} \quad (1.37b)$$

ou encore, en projection sur les axes d'un repère orthonormé x, y, z quelconque, et après division par ρ (cf. 1.33b) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} U &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \Delta U \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} V &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \Delta V \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} W &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu \Delta W \end{aligned} \quad (1.37c)$$

L'introduction de la pression motrice p^* offre l'appréciable avantage de rendre les équations scalaires (1.37c) indépendantes de l'orientation des axes par rapport à l'horizontale et à la verticale, et donc de décrire de manière identique tous les écoulements, quelle que soit leur direction vis-à-vis de la pesanteur.

Cependant, pour des raisons bien compréhensibles, la plupart du temps on choisit x et y comme directions horizontales, et z pour la direction verticale ascendante. Dans ces conditions, on remarquera que :

$$\vec{g} = - \overrightarrow{grad} gz$$

Alors, d'après (1.37a) :

$$\overrightarrow{grad} p^* = \overrightarrow{grad} (p + \rho gz) \quad (1.38a)$$

ce qui donne l'expression de la pression motrice p^* (à une constante près) :

$$p^* = p + \rho gz \quad (1.38b)$$

Quant aux équations (1.37c), qui sont alors appelées « *équations de Navier – Stokes* », elles prennent la forme :

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta U \\
\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta V \\
\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta W
\end{array} \quad (1.38c)$$

En coordonnées cylindriques, les équations de Navier – Stokes sont données à la fin du présent chapitre, dans les annexes.

Enfin, si nous revenons au cas d'un fluide immobile ($\vec{V} = 0$, cf. 1.36b) on arrive à la « loi de l'hydrostatique » :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p^* = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{p^* = p + \rho g z = cte} \quad (1.38d)$$

1.3.4. – Bilan d'énergie mécanique

1.3.4.1. – FORME GÉNÉRALE

Le bilan d'énergie mécanique n'est en fait qu'un sous-produit du bilan de quantité de mouvement. Il est cependant très utilisé, l'un de ses avantages étant le caractère scalaire de l'équation qui l'exprime. Il constitue en outre une étape indispensable pour établir le bilan d'énergie interne (§ 1.3.5).

On part de l'équation (1.32) de bilan local :

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \text{div} \vec{P} = \rho \vec{F} + \text{div} \vec{T}$$

Multiplions scalairement les deux membres par \vec{V} :

$$\vec{V} \cdot \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{div} \vec{P} = \rho \vec{F} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div} \vec{T} \quad (1.39a)$$

Le calcul des produits scalaires, que l'on trouvera dans l'annexe 1.A.3, conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) + \text{div} \left(\rho \frac{\vec{V}^2}{2} \vec{V} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{V} + \frac{\partial(\sigma_{ij} V_i)}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (1.39b)$$

avec sommation sur les indices répétés pour les deux derniers termes.

Si l'on compare cette relation à l'équation générale de bilan local (1.24), on constate qu'elle exprime un *bilan local d'énergie cinétique* ($C = \rho \vec{V}^2 / 2$, en J/m³). Les termes du

second membre représentent les *sources d'énergie cinétique*, qui sont les *puissances des forces appliquées* (W/m^3), à savoir :

- puissance des forces de volume : $\rho \vec{F} \cdot \vec{V}$

- puissance des forces de surface, c'est-à-dire des contraintes, exprimée par une divergence

(relation 1.23) : $\text{div } \vec{V} \cdot \vec{T} = \frac{\partial(V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j}$

- puissance locale des forces intérieures, ou puissance de déformation, due à la déformation de chaque élément de volume sous l'effet des contraintes : $\sigma_{ij} \partial V_i / \partial x_j$. Dans un champ de vitesse uniforme (mouvement en bloc), ce terme est nul.

Intégrons maintenant (1.39b) sur le domaine \mathcal{D} :

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) d\tau + \int_D \text{div} \left(\rho \frac{\vec{V}^2}{2} \cdot \vec{V} \right) d\tau = \int_D \rho \vec{F} \cdot \vec{V} d\tau + \int_D \frac{\partial(V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} d\tau - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

L'application du théorème flux-divergence permet d'aboutir au bilan intégral d'énergie cinétique, encore appelé en mécanique *théorème de l'énergie cinétique* :

$$\boxed{\int_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) d\tau + \int_S \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS} \quad (1.40)$$

$$= \int_D \rho \vec{F} \cdot \vec{V} d\tau + \int_S V_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} d\tau$$

(avec $\vec{F} = \vec{g}$ si les seules forces de volume sont les forces de pesanteur).

1.3.4.2 – APPLICATION AUX FLUIDES NEWTONIENS

Si le fluide est newtonien, σ_{ij} est de la forme : $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$ (1.16b). Nous le reportons dans les deux derniers termes de (1.40), en rappelant que $\vec{T} = \vec{T} \cdot \vec{n}$ et que $\vec{\tau} = \vec{\tau} \cdot \vec{n}$.

♣ Puissance des forces de surface. D'après (1.16a) :

$$\vec{T} \cdot \vec{V} = -p \vec{n} \cdot \vec{V} + \vec{\tau} \cdot \vec{V}$$

Sur l'ensemble de la surface \mathcal{S} , cette puissance a pour valeur :

$$\int_S V_i \sigma_{ij} n_j dS = - \int_S p \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_S V_i \tau_{ij} n_j dS \quad (1.41a)$$

Intégrons sur \mathcal{D} ; il vient :

$$\int_D \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} d\tau = - \int_D p \operatorname{div} \vec{V} d\tau + \int_D \Phi d\tau \quad (1.43)$$

♥ Puissance des forces de volume :

Dans le champ de pesanteur, on sait que si z est la direction verticale ascendante (§1.3.3.1) :

$$\vec{g} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}} gz \quad (1.44a)$$

Ecrivons :

$$\rho \vec{g} \cdot \vec{V} = - \rho \overrightarrow{\operatorname{grad}} gz \cdot \vec{V} = - \operatorname{div}(\rho gz \vec{V}) + gz \operatorname{div} \rho \vec{V}$$

soit, d'après la relation de continuité (1.27) :

$$\rho \vec{g} \cdot \vec{V} = - \operatorname{div}(\rho gz \vec{V}) - gz \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ce qui peut encore s'écrire, puisque z est indépendant de t dans un repère fixe :

$$\rho \vec{g} \cdot \vec{V} = - \operatorname{div}(\rho gz \vec{V}) - \frac{\partial(\rho gz)}{\partial t}$$

et :

$$\int_D \rho \vec{g} \cdot \vec{V} d\tau = - \int_S \rho gz \vec{V} \cdot \vec{n} dS - \int_D \frac{\partial(\rho gz)}{\partial t} d\tau \quad (1.44b)$$

♠ En reportant les expressions (1.41), (1.43) et (1.44b) dans le théorème de l'énergie cinétique (1.40), on obtient après regroupement des termes la *formule de Cotton-Fortier*, ou *équation de Bernoulli généralisée* :

$$\boxed{\int_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho gz + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) d\tau + \int_S \left(\rho gz + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n} dS} \quad (1.45a)$$

$$= \int_S V_i \tau_{ij} n_j dS - \int_S p \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_D p \operatorname{div} \vec{V} d\tau - \int_D \Phi d\tau$$

(on écrit aussi *Bernoulli* : l'orthographe des noms propres n'était pas encore stabilisée au 18ème siècle !)

Lorsqu'il existe des surfaces solides mobiles à l'intérieur de \mathcal{D} (c'est le cas pour les pompes, turbines, hélices...), elles fournissent au fluide (ou reçoivent de lui) une puissance totale W ($W > 0$ ou < 0). Il s'agit d'une source d'énergie supplémentaire, et on ajoutera W au second membre de (1.45a).

On observera que l'équation de Bernoulli généralisée (1.45a) se présente comme un bilan de l'énergie mécanique $\rho gz + \rho \vec{V}^2 / 2$ (énergie potentielle + énergie cinétique), dont les sources sont les termes du second membre.

Enfin, sous forme locale, cette équation (1.45a) ou (1.40) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho gz + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left(\rho gz + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) \vec{V} = \frac{\partial (V_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \operatorname{div} p \vec{V} + p \operatorname{div} \vec{V} - \Phi \quad (1.45b)$$

1.3.4.3. – ÉQUATION DE BERNOULLI

Nous examinons ici un cas particulier considéré comme référence : celui d'un écoulement permanent de fluide parfait isochore ($\rho = \text{cte}$, $\partial / \partial t = 0$, $\mu = 0$).

On montre en cinématique des fluides que dans un écoulement permanent, les trajectoires sont confondues avec les lignes de courant. En tout point M , le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ est donc tangent à la trajectoire qui passe par M .

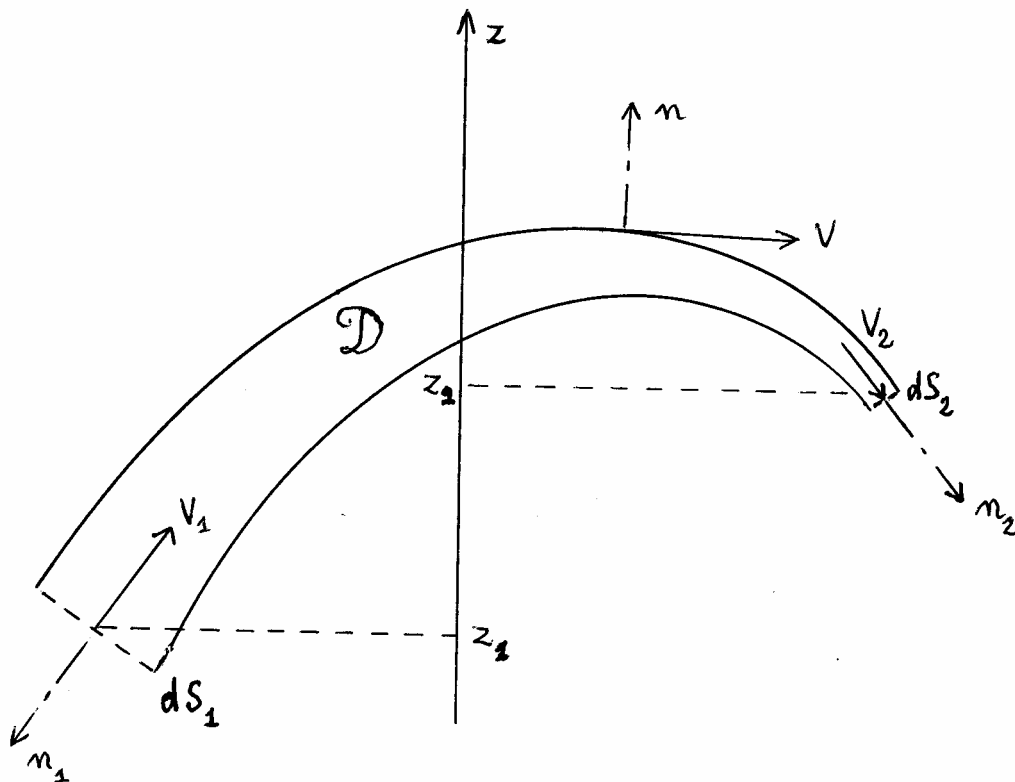


FIG. 1.8. – Tube de courant élémentaire

Choisissons comme domaine \mathcal{D} un tube de courant élémentaire, c'est-à-dire un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé, de section dS très petite (fig.1.8). Alors, en tout point de la surface latérale, on a : $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$.

Limitons ce tube par deux sections planes dS_1 et dS_2 (sur la figure 1.8 elles ont été représentées perpendiculaires à la vitesse, mais leur orientation est *a priori* quelconque). Compte tenu des conditions imposées, (1.45a) devient :

$$\begin{aligned} & \left(\rho g z_1 + \rho \frac{\vec{V}_1^2}{2} \right) \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \left(\rho g z_2 + \rho \frac{\vec{V}_2^2}{2} \right) \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 \\ & = - p_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 - p_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 \end{aligned} \quad (1.46a)$$

Appliqué au même tube de courant, le bilan de masse (1.26) s'écrit :

$$\rho \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \rho \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 = 0$$

ce qui exprime tout simplement la conservation du débit dans le tube.

En reportant dans (1.46a), on obtient *l'équation de Bernoulli* :

$$\boxed{\left(\rho g z_1 + \rho \frac{\vec{V}_1^2}{2} \right) - \left(\rho g z_2 + \rho \frac{\vec{V}_2^2}{2} \right) = p_2 - p_1} \quad (1.46b)$$

Le long d'un tube de courant élémentaire, la variation de l'énergie mécanique du fluide est égale et opposée à la variation de la pression.

1.3.4.4. – UN AUTRE REGARD SUR LA PRESSION

La forme (1.46b) retenue ici pour l'équation de Bernoulli n'est pas la plus répandue dans la littérature. On préfère souvent la présenter comme une équation de conservation, en l'écrivant :

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{\vec{V}_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{\vec{V}_2^2}{2} \quad (1.46c)$$

!!! Cette autre manière de voir illustre une chose importante : c'est l'ambivalence de la « *pression statique* » p (introduite, rappelons-le, au § 1.2.4 pour caractériser un fluide newtonien) qui se manifeste sous deux aspects, tantôt comme contrainte (s'exprimant en N/m^2), tantôt comme énergie volumique, en J/m^3 $\left(\text{puisque } \frac{N}{m^2} = \frac{N \times m}{m^2 \times m} = \frac{J}{m^3} \right)$. Ceci

justifie la terminologie usuelle qui désigne le groupement conservatif de (1.46c) par l'expression « *pression totale* » p_t :

$$p_t = p + \rho g z + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \quad (1.47a)$$

Dans le même esprit, l'énergie cinétique par unité de volume est appelée « *pression dynamique* » p_d :

$$p_d = \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \quad (1.47b)$$

♪ Plus généralement, *en régime permanent* ($\partial / \partial t = 0$) il est légitime de faire apparaître la formule de Cotton-Fortier comme un bilan de pression totale, en faisant passer le terme en $p\vec{V}$ dans le premier membre de (1.45 a ou b). Il vient ainsi pour la forme intégrale :

$$\int_S \left(p + \rho g z + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S V_i \tau_{ij} n_j \, dS + \int_D p \operatorname{div} \vec{V} \, d\tau - \int_D \Phi \, d\tau \quad (1.48)$$

Nous retrouverons cette expression au chapitre 6 pour le calcul des pertes de charge dans les canalisations.

1.3.5. – Bilans d'énergie et d'enthalpie

1.3.5.1. – BILAN D'ÉNERGIE INTERNE

La grandeur considérée est maintenant l'énergie que possède en propre le fluide du domaine \mathcal{D} (*énergie interne + énergie cinétique*), dont le bilan est exprimé par le premier principe de la thermodynamique. D'après ce principe, les sources correspondantes sont constituées par :

- la puissance des forces extérieures à \mathcal{D}
- le flux de chaleur fourni à \mathcal{D} par le milieu extérieur à travers \mathcal{S}
- la puissance calorifique créée à l'intérieur de \mathcal{D} .

Ceci permet d'établir la signification des termes représentés dans les équations de bilans (1.22) et (1.24) :

♣ La densité C concernée est ici l'énergie volumique :

$$C = \rho e + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \quad (J/m^3) \quad (1.49a)$$

e désignant l'énergie interne par unité de masse.

◆ Les sources volumiques représentées par la grandeur q_I sont :

- la puissance des forces de volume $\rho \vec{F} \cdot \vec{V}$, réduite à $\rho \vec{g} \cdot \vec{V}$ lorsque les forces de pesanteur sont seules en jeu ;

- la puissance calorifique P par unité de volume, dégagée ou absorbée à l'intérieur de \mathcal{D} du fait d'une réaction chimique, d'un courant électrique, de micro-ondes, de l'émission d'un rayonnement par un gaz chaud, d'un changement de phase... :

$$P = P(x, y, z, t) \quad (P < 0, \text{ ou } > 0, \text{ ou } = 0)$$

d'où :

$$q_I = \rho \vec{g} \cdot \vec{V} + P \quad (W/m^3) \quad (1.49b)$$

♥ Les sources surfaciques d'énergie regroupées dans le terme $\overrightarrow{q_S}$ sont principalement :

- la puissance des forces de surface - $\vec{T} \cdot \vec{V}$, où \vec{T} est la force exercée par le milieu extérieur sur \mathcal{S} . Si le travail est *moteur* ($\vec{T} \cdot \vec{V} > 0$) il est fourni à \mathcal{D} , donc $\overrightarrow{q_S}_{forces}$ est du sens contraire de \vec{n} (normale extérieure). Si le travail est *résistant* ($\vec{T} \cdot \vec{V} < 0$) il est fourni par \mathcal{D} , donc $\overrightarrow{q_S}_{forces}$ et \vec{n} sont de même sens. Ainsi, dans les deux cas on a :

$$\overrightarrow{q_S}_{forces} \cdot \vec{n} = - \vec{T} \cdot \vec{V} \quad (1.49c)$$

D'après (1.13), en conservant la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\vec{T} \cdot \vec{V} = (\vec{T} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{V} = V_i \sigma_{ij} n_j \quad (W/m^2) \quad (1.49d)$$

- la densité de flux de chaleur φ qui traverse \mathcal{S} , donnée par la loi de Fourier :

$$\overrightarrow{q_S}_{chaleur} = \vec{\varphi} = - \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

soit :

$$\overrightarrow{q_S}_{chaleur} \cdot \vec{n} = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} = \varphi = - \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{n} \quad (1.49e)$$

où λ désigne la *conductivité thermique* du milieu ($W/m \cdot K$) et T la température, le signe - provenant toujours d'une normale \vec{n} dirigée vers l'extérieur de \mathcal{D} .

- le rayonnement φ_r absorbé au niveau de \mathcal{S} , si le milieu est semi-transparent :

$$\overrightarrow{q_S}_{ray} = \vec{\varphi}_r = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \int_{4\pi} L_\lambda \vec{\Omega} d\Omega d\lambda \quad (1.49f)$$

L_λ étant la *luminance spectrale* du milieu, et $\vec{\Omega}$ un vecteur unité balayant l'espace sur 4π stéradians.

Au total :

$$\overrightarrow{q_S} \cdot \vec{n} = - V_i \sigma_{ij} n_j - \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{n} + \vec{\varphi}_r \cdot \vec{n} \quad (1.49g)$$

Le *bilan intégral d'énergie* est obtenu en reportant les termes précédents dans (1.22) :

$$\begin{aligned} & \int_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) d\tau + \int_S \left(\rho e + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n} dS \\ & = \int_D \vec{\rho g} \cdot \vec{V} d\tau + \int_D P d\tau + \int_S V_i \sigma_{ij} n_j dS + \int_S \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{n} dS - \int_S \vec{\varphi}_r \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

Si l'on tient compte maintenant de l'équation (1.40) qui exprime le bilan d'énergie cinétique, et en utilisant (1.43), on aboutit au *bilan intégral d'énergie interne* :

$$\boxed{\int_D \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} d\tau + \int_S \rho e \vec{V} \cdot \vec{n} dS} \\
= \int_D P d\tau + \int_D \Phi d\tau - \int_D p \operatorname{div} \vec{V} d\tau + \int_S \lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T} \cdot \vec{n} dS - \int_S \overrightarrow{\varphi_r} \cdot \vec{n} dS
\quad (1.50)$$

Cette relation constitue en quelque sorte un « *premier principe bis* », et caractérise les sources d'énergie qui sont spécifiquement des sources d'énergie interne, à savoir :

- *Pour les sources de volume* : la puissance thermique P , l'énergie mécanique Φ dissipée par les frottements visqueux (qui réapparaît ici comme source de chaleur) et la puissance liée à la dilatation volumique $p \operatorname{div} \vec{V}$,
- *Pour les sources de surface* : le flux de chaleur et le flux de rayonnement.

La *forme locale du bilan d'énergie interne* est obtenue de la manière usuelle, en appliquant le théorème flux - divergence à (1.50) :

$$\boxed{\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \vec{V}) = P + \Phi - p \operatorname{div} \vec{V} + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) - \operatorname{div} \overrightarrow{\varphi_r}}
\quad (1.51)$$

1.3.5.2. – BILAN D'ENTHALPIE

Pour intéressantes qu'elles soient, les relations (1.50) et (1.51) ne sont pas très opérationnelles car elles contiennent une grandeur non directement mesurable, à savoir : l'énergie interne e . Si l'on met à part le rayonnement, les paramètres directement accessibles à l'expérience sont la pression, la vitesse et la température. Pour substituer cette dernière à l'énergie interne, on devra passer par l'intermédiaire de l'enthalpie et des fonctions thermodynamiques.

Considérons donc *l'enthalpie massique* h :

$$H = e + p / \rho, \quad \text{soit} \quad \rho e = \rho h - p$$

Reportons dans (1.50) ou (1.51) ; il vient, si nous passons directement à l'écriture locale :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h \vec{V}) - \operatorname{div} p \vec{V} = P + \Phi - p \operatorname{div} \vec{V} + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) - \operatorname{div} \overrightarrow{\varphi_r}$$

soit encore :

$$\boxed{\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h \vec{V}) = \frac{\partial p}{\partial t} + P + \Phi + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} p} + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) - \operatorname{div} \overrightarrow{\varphi_r}}
\quad (1.52)$$

La relation ci-dessus (ou sa forme intégrale, que nous n'avons pas écrite) s'interprète comme un *bilan d'enthalpie*, et indique par là même quelles sont les sources d'enthalpie :

- pour les sources volumiques : $\partial p / \partial t$, P , Φ , et $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p$
- pour les sources surfaciques : les flux de chaleur conductif et radiatif

Sachant que :

$$\text{div } \rho \vec{V} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{équation de continuité}),$$

(1.52) devient :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} h = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p + P + \Phi + \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) - \text{div} \vec{\varphi}_r \quad (1.53)$$

L'enthalpie dépend du temps t et des coordonnées d'espace x_i par l'intermédiaire de T et de p . On écrira donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{grad}} h = \frac{\partial h}{\partial T} \overrightarrow{\text{grad}} T + \frac{\partial h}{\partial p} \overrightarrow{\text{grad}} p \end{cases} \quad (1.54)$$

On sait, d'autre part que, C_p étant la *chaleur massique à pression constante* ($J / \text{kg} \cdot K$) et β le *coefficient de dilatation volumique à pression constante* ($1 / K$), on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial T} = C_p \\ \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) \end{cases} \quad (1.55)$$

L'insertion de (1.54) et (1.55) dans (1.53) permet de relier la distribution de température au mouvement du fluide ; il vient après simplification :

$$\boxed{\begin{aligned} & \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \right) \\ & = \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p \right) + P + \Phi + \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) - \text{div} \vec{\varphi}_r \end{aligned}} \quad (1.56)$$

Cas particuliers (en l'absence de rayonnement):

1. Écoulements de gaz

On admet qu'il s'agit de gaz parfaits, d'où : $\beta = 1 / T$

Pratiquement, les termes $\partial p / \partial t$, $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p$, Φ sont presque toujours négligeables, et il reste :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = P + \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) - \text{div} \vec{\varphi}_r \quad (1.57a)$$

2. Écoulements de fluides isochores :

On peut vérifier que $\beta \Delta T$ est petit par rapport à Φ .
L'équation (1.56) se réduit à :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = P + \Phi + \text{div} \left(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \right) \quad (1.57b)$$

3. Milieux immobiles

Le transfert d'énergie est purement conductif. Il est décrit par l'équation :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = P + \text{div} \left(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \right) \quad (1.58)$$

Lorsque la conductivité thermique λ du milieu est constante, on retrouve l'équation linéaire classique :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = P + \lambda \Delta T \quad (1.59)$$

Enfin, s'il n'y a pas de sources volumiques de chaleur ($P = 0$), et en introduisant le paramètre :

$$a = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad (1.60)$$

dénomme « *diffusivité thermique* » du milieu, la loi d'évolution de la température est donnée par l'équation :

$$a \Delta T = \partial T / \partial t \quad (1.61)$$

La diffusivité thermique possède la même dimension (m^2/s) que la viscosité cinématique ν , et s'interprète physiquement d'une manière analogue (§ 1.1.3.3) : elle traduit l'aptitude du matériau à effacer les hétérogénéités de température. Par exemple, si a est grand : λ est grand (la chaleur passe facilement d'un point à un autre) et / ou ρC_p est petit (il y a peu de chaleur à transférer).

Plus généralement, ces deux paramètres caractérisent des mécanisme de diffusion dont nous allons parler maintenant plus en détail.

1.3.6. Prise en compte des phénomènes de diffusion dans les équations de bilans

1.3.6.1. – LOI GÉNÉRALE DE LA DIFFUSION

Pour établir la forme générale d'une équation de bilan dans un domaine \mathcal{D} limité par une frontière \mathcal{S} , nous avons raisonné au paragraphe 1.3.1 sur une grandeur – ou entité physique – K , de densité volumique C variable en fonction des coordonnées d'espace et du temps, et nous avons distingué au niveau de la surface \mathcal{S} des flux et des sources.

Cette distinction permet de prendre en compte le fait que le transfert de K peut s'effectuer suivant deux mécanismes très différents : par mouvement du support matériel (*transport convectif*, encore appelé *advection*) ou par diffusion.

Dans le premier cas, le transport est lié à la vitesse du fluide, et le vecteur densité de flux de K s'écrit :

$$\vec{\varphi}_S = C \vec{V}$$

d'où l'expression du flux correspondant à travers S (relation 1.20) :

$$\Phi_S = \int_S C \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Le transfert par diffusion est caractérisé, quant à lui, par une loi phénoménologique particulière : le vecteur densité de flux est proportionnel au gradient de densité volumique C (ou au gradient de concentration dans des systèmes à plusieurs constituants) et dirigé dans le sens des densités décroissantes :

$$\vec{q}_S = -k \overrightarrow{\text{grad}} C \quad (1.62)$$

Il s'agit d'un mécanisme irréversible qui manifeste une tendance à l'uniformisation de la composition, du champ des vitesses ou du champ de température, et qui n'est pas lié de façon directe au mouvement du fluide. Il se rencontre d'ailleurs tout aussi bien dans les milieux immobiles.

Dans une analyse de bilan en termes de flux et de sources, le transfert par diffusion correspond à une source surfacique.

Examinons brièvement les principaux cas de diffusion

1.3.6.2. – DIFFUSION DE MATIÈRE (OU DIFFUSION MASSIQUE)

♣ *Diffusion pure*

Considérons tout d'abord le cas où le fluide est composé de plusieurs constituants, et où ceux-ci présentent un gradient de concentration.

De nombreux exemples d'une telle situation peuvent être cités. Le plus illustratif est peut-être celui qui figure dans beaucoup de traités de thermodynamique pour présenter la notion d'irréversibilité. On imagine deux enceintes fermées, séparées par une paroi, et contenant deux gaz différents (disons O_2 et N_2) à la même pression. A un moment donné, on ouvre une trappe dans la paroi. Que se passe-t-il ? Les molécules d'oxygène qui auraient frappé la paroi à cet endroit du fait du mouvement brownien vont entrer progressivement dans l'azote, et vice-versa pour les molécules d'azote. Par la trappe ouverte, les flux respectifs de O_2 et de N_2 sont proportionnels aux gradients correspondants de pression partielle (c'est-à-dire de concentration) et ne s'accompagnent d'aucun mouvement d'ensemble des deux gaz. Au bout d'un certain temps, l'homogénéisation sera réalisée dans les deux enceintes, et nulle réversibilité du phénomène ne peut être envisagée (une re-séparation des deux gaz est possible, mais au prix d'une dépense d'énergie, § 1.3.6.4 ♦).

Dans un registre tout à fait différent, quand un liquide s'évapore dans une atmosphère immobile, la vapeur produite à la surface libre s'en éloigne par diffusion dans le gaz, selon une concentration décroissante (PTC, Problème 7.1).

Enfin, beaucoup de phénomènes liés à la dispersion des polluants et des contaminants divers dans l'air, l'eau ou les sols, sont gouvernés par des lois de type diffusion. Ceci est particulièrement important au regard de l'intérêt actuellement porté à la maîtrise de l'environnement.

Donc, au sein d'un mélange inhomogène, un constituant A est l'objet d'un transfert de masse par diffusion, dont le vecteur densité de flux est exprimé par la *loi de Fick* :

$$\overrightarrow{q_{SA}} = - \rho D_A \overrightarrow{\text{grad}}(\rho_A / \rho) \quad (1.63a)$$

pour le cas général, et lorsque le mélange est isochore, par la loi simplifiée :

$$\overrightarrow{q_{SA}} = - D_A \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A \quad (1.63b)$$

Dans (1.63), ρ_A désigne la masse volumique de A dans le mélange, ρ la masse volumique du mélange, et D_A la *diffusivité moléculaire de A dans le mélange*. Ce coefficient D_A s'exprime en m^2/s , et il possède la même signification que la diffusivité thermique a et la viscosité cinématique ν (§ 1.3.6.3 et 1.3.6.5).

Le bilan intégral de masse du constituant A s'écrit donc (relation 1.29a) :

$$\int_D \frac{\partial \rho_A}{\partial t} d\tau + \int_S \rho_A \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_D q_{IA} d\tau + \int_S \rho D_A \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \cdot \vec{n} dS \quad (1.64)$$

et le bilan local (relation (1.29b)) :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div}(\rho_A \vec{V}) = q_{IA} + \text{div}\left(\rho D_A \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_A}{\rho}\right) \quad (1.65a)$$

Si le coefficient de diffusion D_A est une constante, et si le mélange est isochore, alors :

$$\text{div}\left(\rho D_A \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_A}{\rho}\right) = D_A \Delta \rho_A \quad (1.65b)$$

◆ Diffusion dans un champ de forces

La diffusion de matière en présence d'un champ de forces (champ de pression ou champ de forces extérieur) prend le nom de « *convection massique* » (PTC, chap. 7). Le plus souvent, l'origine du champ de forces extérieur est la pesanteur. Mais ce peut être aussi un champ d'accélération dû par exemple à la mise en rotation du fluide : alors les espèces ayant la plus grande masse volumique tendent à migrer vers la périphérie, tandis que les autres se concentrent vers l'axe de rotation. Cette propriété est mise en œuvre dans les appareils industriels appelés *cyclones*, ou encore dans les *centrifugeuses*. Ces dernières sont parfois

sous les feux de l'actualité puisqu'elles peuvent servir en particulier à l'enrichissement de l'uranium, par séparation des isotopes 235 et 238 (sous la forme gazeuse d'hexafluorure UF_6), le second ayant une masse volumique légèrement supérieure au premier. A une toute autre échelle, la formation d'un système planétaire à partir d'un nuage de gaz en rotation aboutit à la séparation des éléments légers (H_2 , He) qui s'accumulent au centre pour donner naissance à une étoile, et des éléments plus lourds qui forment les planètes.

1.3.6.3. – DIFFUSION THERMIQUE

Le transport de chaleur par diffusion se caractérise par une densité de flux (souvent notée $\vec{\varphi}$) proportionnelle au gradient de température ; la loi exprimant cette propriété est connue sous le nom de *loi de Fourier* :

$$\vec{\varphi} = - \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (1.66)$$

λ désignant la conductivité thermique du milieu ($W/m.K$).

Ce terme a déjà été pris en compte dans le bilan d'énergie (§ 1.3.5).

!!! En toute rigueur, la loi de Fourier ne s'identifie strictement à une loi de diffusion de l'énergie interne, ou de l'enthalpie, que lorsque $\rho C_p = cte$. Alors :

$$\vec{\varphi} = - a \overrightarrow{\text{grad}} (\rho C_p T)$$

$a = \lambda / \rho C_p$ étant la *diffusivité thermique* du milieu, déjà introduite (relation 1.60).

1.3.6.4. – ÉCOULEMENTS EN MILIEUX POREUX

♣ *Écoulements de liquides*

Un milieu poreux n'est pas le siège d'un écoulement au sens classique du terme, car il n'y a pas à proprement parler de mouvement d'ensemble du fluide : les particules fluides suivent dans les nombreux pores des trajets aléatoires qui rendent le mécanisme de transport de la matière analogue à un mécanisme de diffusion. Lorsque le milieu est *saturé*, c'est-à-dire lorsque les pores sont entièrement remplis d'une phase liquide de masse volumique ρ , le flux de masse moyen local est donné par la *loi de Darcy* :

$$\vec{q}_S = - \rho \frac{K}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p^* \quad (1.67)$$

où p^* désigne la *pression motrice* dans l'écoulement (§ 1.3.3.2), le paramètre K étant la *perméabilité* du milieu.

Faisons ici une parenthèse. Par analogie avec un écoulement *stricto sensu*, on écrit souvent cette loi sous la forme : $\vec{q}_S = \rho \vec{V}$, en définissant \vec{V} comme une *vitesse apparente de filtration*. Ce terme \vec{V} ne doit pas être confondu avec une vitesse locale du fluide, qui n'est pas définie dans un tel écoulement.

Appliquons maintenant l'équation de bilan intégral (1.22) à la masse totale du fluide ; le terme de transport par mouvement d'ensemble du fluide est remplacé ici par un terme de source qui a pour expression :

$$\int_S q_S dS = - \int_S \frac{K\rho}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p^* \cdot \vec{n} dS$$

Bien entendu, il n'y a pas de sources volumiques q_I puisque le bilan porte sur la masse totale du fluide (§ 1.3.2.1).

Quant à la densité volumique locale de matière, dans le cas d'un milieu saturé elle a pour valeur : $C = \rho\varepsilon$, où ε est la « porosité » du milieu (volume des pores / volume total), d'où le bilan intégral de masse :

$$\int_D \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} d\tau = \int_S \frac{K\rho}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p^* \cdot \vec{n} dS \quad (1.68)$$

ainsi que le bilan local :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{K\rho}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p^* \right) \quad (1.69)$$

◆ *Ecoulements de gaz*

Si le milieu poreux est traversé par un gaz, la loi de Darcy s'applique encore, à ceci près qu'il faudra souvent tenir compte de la variation de la masse volumique avec la pression.

1.3.6.5. – DIFFUSION DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Pour terminer cette brève revue des principaux phénomènes de diffusion, nous allons montrer que dans un grand nombre de situations, le transfert de quantité de mouvement provoqué par les forces de viscosité s'apparente à un mécanisme de diffusion. Ceci apparaît clairement en partant de l'équation (1.32) :

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \text{div} \overline{\overline{\overline{P}}} = \rho\vec{F} + \text{div} \overline{\overline{\overline{T}}}$$

dans laquelle :

$$\text{div} \overline{\overline{\overline{T}}} = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{div} \overline{\overline{\overline{\tau}}} = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{div} (2\mu \overline{\overline{\overline{D}}})$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où $\mu = \text{cte}$ et $\rho = \text{cte}$ (soit $\text{div} \vec{V} = 0$). Alors, d'après l'Annexe 1.A.2.♥, on a :

$$2\mu \text{div} \overline{\overline{\overline{D}}} = \mu \text{div} (\overline{\overline{\overline{\text{grad}} \vec{V}}}) = \nu \text{div} \left\{ \overline{\overline{\overline{\text{grad}} (\rho\vec{V})}} \right\}$$

et d'après (1.33a) :

$$\text{div} \overline{\overline{\overline{P}}} = \overline{\overline{\overline{\text{grad}} \vec{V}}} \cdot \rho\vec{V}$$

Alors, (1.32) devient :

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \overline{\overline{\overline{\text{grad}} \vec{V}}} \cdot \rho\vec{V} = \rho\vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \text{div} \left\{ \overline{\overline{\overline{\text{grad}} (\rho\vec{V})}} \right\} \quad (1.70a)$$

Il est manifeste que le dernier terme traduit l'existence d'un flux de quantité de mouvement qui est un flux de diffusion proportionnel au gradient de $\rho\vec{V}$, avec un coefficient de diffusion égal à la viscosité cinématique ν .

En projetant sur les axes de coordonnées, (1.70a) s'écrit enfin (Annexe 1.A.2.♣) :

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \text{div}(V_i \rho \vec{V}) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \rho V_i) \quad (1.70b)$$

1.3.7. – Bilans d'entropie et d'exergie

1.3.7.1. – LE RÔLE DES BILANS ENTROPIQUES

A côté des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, qui fournissent les équations de base pour résoudre les problèmes de thermoconvection, il existe une autre famille de bilans, qui jouent par rapport aux premiers un rôle un peu particulier. Ce sont les bilans entropiques : bilan d'entropie proprement dit, et bilan d'exergie.

D'une part, le traitement de certains problèmes (mélanges réactifs, écoulements polyphasiques, structures dissipatives, transferts turbulents...) exige l'intervention d'équations supplémentaires. Celles-ci peuvent alors être obtenues par l'écriture des sources d'entropie, que la thermodynamique des processus irréversibles permet d'exprimer sous forme de relations phénoménologiques, ou en appliquant le principe du minimum de production locale d'entropie.

Mais d'autre part, le bilan d'entropie ou d'exergie permet aussi d'optimiser un processus thermoconvectif, en déterminant parmi plusieurs évolutions possibles celles qui est la plus avantageuse pour l'utilisateur. La démarche suivie concerne alors une recherche d'extrémum : par exemple, le minimum de la production d'entropie, pour caractériser le processus le plus proche de la réversibilité. On retient ensuite les conditions aux limites qui donnent le « meilleur » processus.

1.3.7.2. – BILAN D'ENTROPIE

L'entité physique considérée dans la relation générale (1.24) est ici l'entropie du milieu matériel, et C représente l'entropie volumique :

$$C = \rho s \quad (J/K \cdot m^3)$$

s étant l'entropie par unité de masse.

Par le second principe et la relation de Gibbs, la thermodynamique nous désigne les sources locales d'entropie, qui se divisent en trois groupes :

♣ Les sources visqueuses d'entropie, dues à l'énergie mécanique Φ dissipée sous forme de chaleur par la viscosité : Φ/T

◆ Les sources thermiques d'entropie, en relation avec les autres sources d'énergie interne représentées au second membre de (1.51), exception faite des sources élastiques (donc réversibles) liées à la pression :

- Source liée à la puissance thermique P mise en jeu : P/T (P inclut l'énergie de réaction s'il s'agit d'un mélange réactif).

- Source liée au flux de chaleur : $\frac{1}{T} \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) - \frac{1}{T} \text{div} \overrightarrow{\varphi}_r$

♥ Les sources massiques (ou structurelles) d'entropie, liées à l'ensemble des sources de masse (§ 1.3.2.2), soit d'après (1.65) pour un mélange réactif à N constituants :

$$-\frac{1}{T} \sum_{A=1}^N \mu_A \left\{ q_{IA} + \operatorname{div} \left(\rho D_A \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \right) \right\}$$

Dans cette dernière expression, les coefficients μ_A sont les *potentiels chimiques* massiques des différents constituants, exprimés en J/kg . Le signe $-$ provient de la convention de signe avec laquelle ils sont définis.

Le bilan local d'entropie s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \vec{V}) = \\ \frac{1}{T} \left\{ P + \Phi + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) - \operatorname{div} \vec{\varphi}_r - \sum_{A=1}^N \mu_A q_{IA} - \sum_{A=1}^N \mu_A \operatorname{div} \left(\rho D_A \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.71)$$

En apparence, cette équation n'est pas exactement conforme au modèle général (1.24) puisqu'elle ne dissocie pas clairement les sources volumiques des sources surfaciques, les termes en *div* étant affectés des coefficients $1/T$ ou μ_A/T . Mais elle s'y adapte aisément si on prend le temps de voir que :

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{T} \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = \operatorname{div} \left(\frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \right) - \lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{T} \\ = \operatorname{div} \left(\frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \right) + \frac{\lambda}{T^2} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} T)^2 \end{cases} \quad (1.72a)$$

$$\text{b) } \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{\varphi}_r = \operatorname{div} \left(\frac{1}{T} \vec{\varphi}_r \right) + \frac{1}{T^2} \vec{\varphi}_r^2 \quad (1.72b)$$

et que, de même :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \mu_A \operatorname{div} \left(\rho D_A \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \right) = \\ \operatorname{div} \left(\frac{\rho \mu_A D_A}{T} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \right) - \rho \mu_A D_A \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (1.73)$$

Remplaçons (1.72) et (1.73) dans (1.71), en regroupant les termes en divergence du second membre :

$$\boxed{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho s \vec{V}) = \frac{P}{T} + \frac{\Phi}{T} + \frac{\lambda}{T^2} (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2 + \frac{1}{T^2} \overrightarrow{\varphi}_r^2 - \frac{1}{T} \sum_A \mu_A q_{IA} + \sum_A \rho \mu_A D_A \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} + \text{div} \left(\frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T \right) - \text{div} \left(\frac{1}{T} \overrightarrow{\varphi}_r \right) - \sum_A \text{div} \left(\frac{\rho \mu_A D_A}{T} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \right)} \quad (1.74)$$

Voilà une nouvelle écriture qui fait maintenant apparaître nettement les sources volumiques d'entropie (exprimées par les six premiers termes du second membre), et les sources surfaciques (représentées par les termes en divergence, et liées au flux de chaleur et au flux de masse). On observera, d'une part que la sixième source – volumique – est le fruit d'un couplage entre la diffusion de chaleur et la diffusion massique, d'autre part que le flux de chaleur par conduction thermique s'accompagne d'un flux d'entropie de même sens avec une « conduction entropique » égale à λ/T (source N°7).

En thermodynamique des processus irréversibles, on appelle « *taux de production d'entropie* $\sigma(s)$ » l'ensemble des productions volumiques d'entropie :

$$\sigma(s) = \frac{P}{T} + \frac{\Phi}{T} + \frac{\lambda}{T^2} (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2 - \frac{1}{T^2} \overrightarrow{\varphi}_r^2 - \frac{1}{T} \sum_A \mu_A q_{IA} + \sum_A \rho \mu_A D_A \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} \quad (1.75)$$

D'après le second principe de la thermodynamique, cette production interne d'entropie n'est jamais négative :

$$\sigma(s) \geq 0 \quad (1.76)$$

Autrement dit, toute évolution pour laquelle on aurait $\sigma(s) < 0$ est une évolution impossible. Lorsque $\sigma(s) = 0$, l'évolution est réversible. Quand on a $\sigma(s) > 0$, le processus est irréversible et $\sigma(s)$ caractérise son degré d'irréversibilité.

D'un point de vue pratique, l'amélioration d'un processus vis-à-vis des irréversibilités consistera donc à minimiser le taux de production d'entropie $\sigma(s)$.

Quant au bilan intégral d'entropie (par lequel nous aurions pu commencer, mais qui est un peu volumineux à écrire), il s'établit immédiatement à partir de (1.74) et (1.75) :

$$\int_D \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} d\tau + \int_S \rho s \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_D \sigma(s) d\tau + \int_S \frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{n} dS - \int_S \frac{1}{T} \overrightarrow{\varphi}_r \cdot \vec{n} dS - \sum_A \int_S \frac{\rho \mu_A D_A}{T} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \cdot \vec{n} dS \quad (1.77)$$

L'articulation entre les bilans présentés ici et la formulation traditionnelle en thermodynamique classique fait l'objet d'un paragraphe en Annexe (1.A.4).

1.3.7.3. – BILAN D'EXERGIE

L'exergie n'est pas une des entités physiques fondamentales donnant lieu à bilan, car elle est définie à partir de l'enthalpie et de l'entropie. On a en effet :

$$ex = h - T_e s \quad (1.78a)$$

où T_e est la température ambiante extérieure au système, ex étant ici l'exergie massique exprimée en J/kg .

Néanmoins, l'intérêt pour les bilans d'exergie se développe dans l'étude des processus industriels puisque l'exergie représente en fait *l'enthalpie utilisable*.

Revenant aux équations de bilan local d'enthalpie (1.52) et d'entropie (1.74), nous pouvons établir le bilan local d'exergie, en nous limitant pour simplifier au cas où le fluide est transparent ($\varphi_r = 0$), de composition uniforme et constante ($\rho_A / \rho = cte \forall A$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho ex)}{\partial t} + \text{div}(\rho ex \vec{V}) &= \frac{\partial p}{\partial t} + P + \Phi + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) \\ &\quad - \frac{T_e}{T}(P + \Phi) - \lambda \frac{T_e}{T^2} (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2 - T_e \text{div}\left(\frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T\right) \end{aligned}$$

soit, en regroupant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho ex)}{\partial t} + \text{div}(\rho ex \vec{V}) &= \frac{\partial p}{\partial t} + (P + \Phi) \left(1 - \frac{T_e}{T}\right) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p \\ &\quad - \lambda \frac{T_e}{T^2} (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2 + \text{div}\left\{\lambda \left(1 - \frac{T_e}{T}\right) \overrightarrow{\text{grad}} T\right\} \end{aligned} \quad (1.78b)$$

Ce bilan fait apparaître des sources volumiques d'exergie (sources mécaniques liées à la pression et sources thermiques), et une source surfacique (terme en divergence) qui s'interprète comme un terme de diffusion.

1.4. - VORTICITÉ ET FONCTION DE COURANT

La résolution des équations de quantité de mouvement est souvent compliquée par la présence des termes de pression. Dans certaines circonstances, il est cependant possible de s'en débarrasser, en s'appuyant sur d'autres paramètres du mouvement.

1.4.1. – Écoulements plans

Considérons *un écoulement bidimensionnel de fluide isochore*. Dans le plan x, y il est décrit par les deux premières équations (1.37c) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \Delta U \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \Delta V \end{aligned}$$

A l'évidence, un moyen simple d'éliminer la pression est de dériver la première équation par rapport à y , de dériver la seconde par rapport à x , et de soustraire celle-ci de la première, ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V) - \frac{\partial}{\partial y} (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U) = \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta V - \frac{\partial}{\partial y} \Delta U \right) \quad (1.79a)$$

Les opérateurs ∂ et Δ peuvent être permutés dans le second membre. En outre, en développant les termes, on montre que :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V) - \frac{\partial}{\partial y} (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U) = \text{div} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \vec{V} \right\}$$

et l'équation (1.79a) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \text{div} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \vec{V} \right\} = \nu \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (1.79b)$$

On reconnaît dans la grandeur entre parenthèses la composante selon z du *vecteur tourbillon* $2\vec{\Omega}$ (§ 1.2.1. ♦). En effet, dans un écoulement bidimensionnel :

$$2\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Cette composante est appelée *vorticité* de l'écoulement, et désignée par Ω (sans indice) :

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (s^{-1}) \quad (1.80)$$

L'équation (1.79b) se présente donc comme un *bilan local de vorticité* (dérivé du bilan de quantité de mouvement) avec un terme source qui s'identifie à un mécanisme de diffusion visqueuse, et elle porte le nom *d'équation de vorticité* :

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\Omega \vec{V}) = \nu \Delta \Omega} \quad (1.81)$$

Bien entendu, la pression n'a pas été évacuée du problème par un tour de passe – passe. Grâce à la petite manipulation précédente, les forces de pression n'apparaissent plus directement en tant que telles, mais elles ont été intégrées dans les autres paramètres du mouvement.

🎵 Par contre, cette astuce ne marche pas avec les écoulements tridimensionnels : on peut toujours éliminer la pression dans les équations (1.37c) prises deux par deux, mais on se

retrouve avec des termes qui contiennent les trois composantes de la vitesse et qui n'apportent guère de simplification.

!!! Un autre point mérite d'être souligné : avoir écarté le vecteur $\vec{\Omega}$ à partir du paragraphe 1.2.1.♠ (en considérant des écoulements irrotationnels) pour le voir resurgir maintenant n'est pas le signe d'une contradiction. C'est seulement dans l'évaluation des contraintes que l'influence de la composante rotationnelle du mouvement a été négligée (§ 1.2.4.♣). Mais dans les équations de bilans, tous les aspects du mouvement sont bien présents et entièrement décrits.

1.4.2. – Fonction de courant

L'opération effectuée au paragraphe précédent a permis de s'affranchir de la pression, et simultanément de réduire de deux à une les équations dynamiques. Le système à résoudre est donc maintenant composé de l'équation (1.81) et de l'équation de continuité.

Pour des raisons pratiques que nous ne détaillerons pas ici, il peut être avantageux d'introduire, en plus de Ω , une seconde fonction de U et V , la *fonction de courant* Ψ , définie par les relations :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad V = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.82)$$

Cette fonction de courant satisfait l'équation de continuité puisque :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} \equiv 0$$

D'autre part, la vorticité Ω s'exprime aisément en fonction de Ψ :

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = - \Delta \Psi$$

Il est donc parfaitement licite de remplacer l'équation de continuité par l'équation ci-dessus, réécrite en ne gardant que les deux termes extrêmes :

$$\boxed{\Omega + \Delta \Psi = 0} \quad (1.83)$$

Le système à résoudre est alors composé des équations (1.81) et (1.83):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\Omega \vec{V}) &= \nu \Delta \Omega \\ \Omega + \Delta \Psi &= 0 \end{aligned}$$

La résolution donne successivement Ω , puis Ψ , et enfin U et V .

1.4.3. – Écoulements axisymétriques

Les écoulements à symétrie cylindrique constituent une autre famille d'écoulements bidimensionnels, pour lesquels la méthode précédente s'applique avec quelques nuances. Dans n'importe quel plan diamétral x, r (x : direction axiale, r : direction radiale, vecteur vitesse $\vec{V} = (U, V)$), l'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0 \quad (1.84)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (1.85a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \right) \quad (1.85b)$$

Le vecteur tourbillon a maintenant pour composantes :

$$2\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

où $\Omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial r}$ est encore la *vorticité* de l'écoulement.

La dérivation de (1.85a) par rapport à r , puis de (1.85b) par rapport à x , suivie d'une soustraction, donne cette fois :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(\Omega U)}{\partial x} + \frac{\partial(\Omega V)}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\Omega}{r^2} \right) \quad (1.87a)$$

ce qui s'écrit aussi, pour faire mieux apparaître l'aspect « bilan de vorticité » :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div}(\Omega \vec{V}) = \nu \Delta \Omega \quad (1.87b)$$

Cette équation est l'équivalent de (1.81), obtenue pour un écoulement plan.

D'autre part, la *fonction de courant* Ψ , solution de l'équation de continuité, est définie ici par :

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad ; \quad V = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.88)$$

En remplaçant dans l'expression de Ω , il vient :

$$\Omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \quad (1.89)$$

qui est l'équivalent de (1.83). La résolution s'effectue d'une façon analogue.

1.5. - FORMULATION GÉNÉRALE D'UN PROBLÈME D'ÉCOULEMENT ANISOTHERME

Avec un fluide monophasique de composition uniforme et constante, résoudre complètement un problème de thermoconvection consiste à déterminer en fonction des coordonnées d'espace et du temps :

- la vitesse \vec{V} (c'est-à-dire U, V, W) ;
- la masse volumique ρ ;
- la pression p ;
- la température T .

Assez fréquemment, on pourra se limiter à une résolution en certains points particuliers. Quoiqu'il en soit, le problème comportant six inconnues doit être résolu au moyen de six équations, à savoir :

- le bilan de masse ;
- le bilan de quantité de mouvement (3 équations)
- le bilan d'énergie ;
- l'équation d'état du fluide.

Dans celles-ci, on devra faire intervenir des *conditions aux limites* portant sur \vec{V} , p et T , qui peuvent être groupées en deux catégories.

♣ - Les conditions physiques générales :

- condition d'adhérence à une paroi solide imperméable :
 \vec{V} = vitesse locale de la paroi ($\vec{V} = 0$ sur une paroi fixe) ;
- continuité du champ de température
- conservation du flux de chaleur.

♦ - Les conditions circonstancielles, qui dépendent du problème traité, par exemple :

- p ou \vec{V} imposée ;
- T imposée, ou flux de chaleur imposé.

La connaissance des champs de vitesses et de température, ainsi que de p et ρ , permet ensuite le calcul de toutes les grandeurs dynamiques et thermiques intéressantes : débit, frottement pariétal, flux de chaleur pariétal, puissance thermique échangée, etc.

Éventuellement, l'examen du bilan d'entropie (ou d'exergie), permettra l'optimisation du processus étudié.

ANNEXES AU CHAPITRE 1

1.A.1. – LES BILANS SUR UN DOMAINE MOBILE ET LE CONCEPT DE DÉRIVÉE PARTICULAIRE

Il est de tradition de présenter les équations de bilans en mécanique des fluides à l'aide d'un concept que nous n'avons pas utilisé : la *dérivée particulaire*.

Pour le définir, reprenons le raisonnement suivi au paragraphe 1.3.1 lorsque nous avons établi la forme générale d'une équation de bilan, en y introduisant toutefois une différence importante : le domaine \mathcal{D} sera maintenant supposé mobile. Deux éventualités sont alors à considérer.

♣ *Domaine animé du même mouvement que le fluide*

Plaçons-nous dans l'hypothèse où il n'y a pas de diffusion massique dans le fluide.

Nous choisissons à l'instant initial un domaine fluide Δ , et nous suivons dans leur mouvement les molécules qu'il contient.

La frontière Σ de Δ va donc ici se déplacer et se déformer en fonction du mouvement des molécules qu'elle entoure, cependant que Δ va renfermer toujours les mêmes molécules.

Cette procédure est connue sous le nom de *description lagrangienne*, par opposition à la *description eulérienne* qui utilise un domaine \mathcal{D} fixe.

A chaque instant, la quantité totale K de la grandeur physique contenue dans Δ a pour valeur :

$$K = \int_{\Delta} C \, d\tau$$

comme dans 1.3.1, mais cette fois Δ est mobile. Aussi, pour la distinguer de la dérivée classique $\frac{\partial K}{\partial t}$, la variation de K par unité de temps est-elle notée ici $\frac{DK}{Dt}$ et appelée *dérivée particulaire*.

En description eulérienne du mouvement (\mathcal{D} fixe), le bilan fait intervenir quatre grandeurs (§ 1.3.1) :

- la variation de K : $\frac{\partial K}{\partial t} = \int_D \frac{\partial C}{\partial t} \, d\tau$;

- le flux Φ_S à travers la surface S , dû au mouvement du support matériel ;

- les sources surfaciques Q_S ;

- les sources volumiques Q_I ,

et l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = Q_I - Q_S - \Phi_S \tag{1}$$

En description lagrangienne du mouvement, il n'y a plus de flux à travers Σ dû au mouvement du support matériel puisque Σ se déforme en suivant ce mouvement. Il reste donc dans le bilan :

- la variation de K : $\frac{DK}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Delta} C \, d\tau$;
- les sources de surface Q_{Σ} ;
- les sources volumiques Q_I ,

d'où l'équation :

$$\frac{DK}{Dt} = Q_I - Q_{\Sigma} \quad (2)$$

La dérivée particulière est donc égale à la puissance des sources dans Δ et sur Σ .

Soit alors \mathcal{D} le domaine fixe qui coïncide avec Δ à l'instant t . Le bilan instantané sur \mathcal{D} est conforme à la relation (1). Mais d'autre part, en comparant (1) et (2), on voit que DK / Dt s'écrit également :

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \Phi_S$$

$$\text{soit : } \frac{DK}{Dt} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial C}{\partial t} \, d\tau + \int_S C \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \quad (3)$$

d'où l'on déduit l'expression de la dérivée particulière locale :

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div} C \vec{V} \quad (4)$$

Si $DC / Dt = 0$, cela signifie que C est constante sur une trajectoire. En particulier, dans un écoulement permanent, les conditions $\{C = \text{cte sur une trajectoire}\}$ et $\{\text{div} C \vec{V} = 0\}$ sont équivalentes.

On appelle *écoulement isochore* un écoulement tel que $\rho = \text{cte}$ sur une trajectoire. Dans ce cas, on a en tout point : $\vec{V} \perp \overrightarrow{\text{grad}} \rho$. D'autre part, d'après (4),

$$\text{div} \rho \vec{V} = 0 = \rho \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho$$

Par conséquent : $\text{div} \vec{V} = 0$. Il n'est donc pas nécessaire que le fluide soit isochore pour que cette propriété soit vérifiée.

◆ *Domaine animé d'un mouvement propre*

Replaçons-nous maintenant dans le cas général, où il peut y avoir diffusion massique, et supposons que l'on veuille écrire un bilan pour un domaine Δ animé d'un mouvement donné. Chaque point de la surface Σ a une vitesse $\vec{W} = \vec{W}(x, y, z, t)$. Au même point, à l'instant t , la vitesse de l'écoulement est \vec{V} .

Soit \vec{V}_r la vitesse relative : $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{W}$.

La puissance instantanée des sources sur Σ et dans Δ est toujours : $Q_I - Q_{\Sigma}$. Quant au flux Φ_{Σ} à travers Σ , il a pour valeur :

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} C \vec{V}_r \cdot \vec{n} d\Sigma$$

Soit δK la variation de K pendant un petit intervalle de temps Δt . Le bilan s'écrit :

$$\frac{\delta K}{\delta t} = Q_I - Q_{\Sigma} - \Phi_{\Sigma} = Q_I - Q_{\Sigma} - \int_{\Sigma} C \vec{V}_r \cdot \vec{n} d\Sigma$$

Appelons \mathcal{D} le domaine fixe qui coïncide avec Δ à l'instant t . On peut encore conserver la définition précédente de la dérivée particulaire en posant : $DK / Dt = Q_I - Q_S$, soit d'après (3) :

$$\frac{DK}{Dt} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial C}{\partial t} d\tau + \int_S C \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

On a dans ce cas :

$$\frac{\delta K}{\delta t} = \frac{DK}{Dt} - \int_S C \vec{V}_r \cdot \vec{n} dS$$

La notion de dérivation particulaire présente un grand intérêt historique et heuristique en mécanique des fluides car elle a permis la formulation des équations de bilan local. En effet, pour établir directement ces relations, qui ont chronologiquement précédé les équations de bilan intégral, le recours à la dérivation particulaire ne peut être évité. Mais dans la pratique, elle n'est vraiment indispensable que dans des cas particuliers.

1.A.2. – CALCULS RELATIFS AU BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Pour écrire le bilan de quantité de mouvement (§ 1.3.3), il a fallu faire intervenir les termes $\overline{\text{div } \vec{P}}$ et $\overline{\text{div } \vec{T}}$, que nous calculons ici.

♣ Le tenseur des quantités de mouvement $\overline{\vec{P}}$ a pour composantes : $P_{ij} = \rho V_i V_j$.

La divergence d'un tenseur d'ordre 2 est un vecteur. Sa composante suivant la coordonnée i est par définition (on utilise la convention de sommation sur les indices répétés) :

$$(\text{div } \overline{\vec{P}})_i = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\rho V_i V_j)}{\partial x_j} = \text{div} (V_i \cdot \rho \vec{V})$$

d'où :

$$(\text{div } \overline{\vec{P}})_i = \overrightarrow{\text{grad}} V_i \cdot \rho \vec{V} + V_i \text{div } \rho \vec{V}$$

et enfin, conformément à (1.33a) :

$$\boxed{\overline{\text{div } \vec{P}} = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} \cdot \rho \vec{V} + \vec{V} \text{div } \rho \vec{V}}$$

◆ D'après (1.18b), on a d'autre part :

$$\overline{\text{div } \vec{T}} = - \text{div } p \vec{I} + \text{div} \left\{ \left(-\frac{2}{3} \mu \text{div } \vec{V} \right) \vec{I} \right\} + 2 \text{div } \mu \overline{\vec{D}}.$$

Le premier terme se décompose en deux :

$$\operatorname{div} p \overline{\overline{I}} = p \operatorname{div} \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{I}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} p$$

mais $\overline{\overline{I}}$ étant le tenseur unité, $\operatorname{div} \overline{\overline{I}} = 0$ et il reste :

$$\operatorname{div} p \overline{\overline{I}} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} p$$

De même pour le second terme :

$$\operatorname{div} \left\{ \left(-\frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \overrightarrow{V} \right) \overline{\overline{I}} \right\} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\mu \operatorname{div} \overrightarrow{V})$$

et si $\mu = cte$:

$$\operatorname{div} \left\{ \left(-\frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \overrightarrow{V} \right) \overline{\overline{I}} \right\} = -\frac{2}{3} \mu \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \overrightarrow{V})$$

♥ Dans le troisième terme, on admettra d'abord $\mu = cte$, d'où : $\operatorname{div} \mu \overline{\overline{D}} = \mu \operatorname{div} \overline{\overline{D}}$.

Compte tenu du fait que $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$ (relation 1.9), on obtient :

$$\left(\operatorname{div} \overline{\overline{D}} \right)_i = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right)$$

ou encore :

$$\left(\operatorname{div} \overline{\overline{D}} \right)_i = \frac{1}{2} \left(\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} V_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \overrightarrow{V} \right).$$

Par conséquent :

$$2\mu \operatorname{div} \overline{\overline{D}} = \mu \left(\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \overrightarrow{V} \right)$$

soit en définitive (relation 1.33c) :

$$\boxed{\operatorname{div} \overline{\overline{T}} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \mu \left(\Delta \overrightarrow{V} + \frac{1}{3} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \overrightarrow{V} \right)}$$

♠ Si $\mu \neq cte$:

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{div} 2\mu \overline{\overline{D}} \right)_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \varepsilon_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \frac{\partial V_j}{\partial x_i}, \text{ que nous noterons :} \\ &= (I)_i + (II)_i \end{aligned}$$

Les choses sont claires pour le premier terme :

$$(I)_i = \operatorname{div} \mu \overrightarrow{\operatorname{grad}} V_i$$

Elles le sont moins pour le second, que nous aurons intérêt à détailler :

$$(II)_i = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$

ce que la commutativité de l'opérateur dérivation permet d'écrire :

$$(II)_i = \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} = \mu \left(\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{V} \right)_i + \left({}^t \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu \right)_i$$

où t désigne la matrice transposée (permutation des indices i et j).

D'où finalement :

$$2 \text{div} \mu \overline{\overline{D}} = \text{div} \left(\mu \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V} \right) + \mu \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{V} + {}^t \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu$$

Alors :

$$\text{div} \overline{\overline{T}} = - \overrightarrow{\text{grad}} p - \frac{2}{3} \overrightarrow{\text{grad}} (\mu \text{div} \overrightarrow{V}) + \text{div} \left(\mu \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V} \right) + \mu \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{V} + {}^t \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu$$

et puisque :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\mu \text{div} \overrightarrow{V}) = \mu \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{V} + \text{div} \overrightarrow{V} \overrightarrow{\text{grad}} \mu$$

on obtient en regroupant :

$$\text{div} \overline{\overline{T}} = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{div} \left(\mu \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V} \right) + \frac{1}{3} \mu \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{V} - \frac{2}{3} \text{div} \overrightarrow{V} \overrightarrow{\text{grad}} \mu + {}^t \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu$$

1.A.3. – CALCULS RELATIFS AU BILAN D'ÉNERGIE CINÉTIQUE

On veut expliciter les termes de l'équation (1.39a) :

$$\overrightarrow{V} \cdot \frac{\partial (\rho \overrightarrow{V})}{\partial t} + \overrightarrow{V} \cdot \text{div} \overline{\overline{P}} = \rho \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V} + \overrightarrow{V} \cdot \text{div} \overline{\overline{T}}$$

Le premier terme s'écrit :

$$\overrightarrow{V} \cdot \frac{\partial (\rho \overrightarrow{V})}{\partial t} = \overrightarrow{V} \cdot \left(\rho \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \overrightarrow{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overrightarrow{V}^2}{2} \right) + \overrightarrow{V}^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

et en appliquant l'équation de continuité : $\text{div} (\rho \overrightarrow{V}) = - \partial \rho / \partial t$:

$$\overrightarrow{V} \cdot \frac{\partial (\rho \overrightarrow{V})}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overrightarrow{V}^2}{2} \right) + \frac{\overrightarrow{V}^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\overrightarrow{V}^2}{2} \text{div} (\rho \overrightarrow{V})$$

soit :

$$\clubsuit \quad \overrightarrow{V} \cdot \frac{\partial (\rho \overrightarrow{V})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\overrightarrow{V}^2}{2} \right) - \frac{\overrightarrow{V}^2}{2} \text{div} (\rho \overrightarrow{V})$$

Connaissant l'expression de $\text{div} \overline{\overline{P}}$, donnée par (1.33a), le second terme devient, en utilisant la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\vec{V} \cdot \text{div} \vec{P} = V_i \left\{ \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V_i + V_i \text{div}(\rho \vec{V}) \right\} = \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{V}^2}{2} + \vec{V}^2 \text{div}(\rho \vec{V})$$

$$\blacklozenge \quad \vec{V} \cdot \text{div} \vec{P} = \text{div} \left(\rho \frac{\vec{V}^2}{2} \vec{V} \right) + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \text{div}(\rho \vec{V})$$

Enfin, le dernier terme s'écrit :

$$\vec{V} \cdot \text{div} \vec{T} = V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

ou encore :

$$\heartsuit \quad \vec{V} \cdot \text{div} \vec{T} = \frac{\partial (V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

En reportant \clubsuit , \blacklozenge , \heartsuit dans (1.39a), on obtient (1.39b) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) + \text{div} \left(\rho \frac{\vec{V}^2}{2} \vec{V} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{V} + \frac{\partial (V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

1.A.4. BILAN D'ENTROPIE : FORMULATION CLASSIQUE

Il peut être utile de bien préciser comment le bilan d'entropie écrit en 1.3.7.2 se raccorde avec les formulations traditionnelles du second principe.

Partons de l'expression (1.77). Puisque l'on a : $\sigma \geq 0$, elle s'écrit encore :

$$\int_D \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} d\tau \geq - \int_S \rho s \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_S \frac{1}{T} \vec{q}_r \cdot \vec{n} dS + \int_S \frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{n} dS \quad (1)$$

L'expression à droite de l'inégalité représente le flux entropique dû aux échanges avec le milieu extérieur. En écriture symbolique, on a donc :

$$dS \geq d_e S$$

ou encore, en notant $d_i S$ la production d'entropie due aux changements internes du système :

$$d_i S = \int_D \sigma(s) d\tau \geq 0$$

$$dS = d_i S + d_e S$$

Si \mathcal{D} est un système *fermé* ($\vec{V} = 0$ à la frontière), dont la température de surface T est *uniforme*, on retrouve à partir de (1) la relation connue :

$$dS \geq dQ/T$$

où dQ est la chaleur échangée avec l'extérieur.

Enfin, s'il s'agit d'un système *fermé et isolé* (sans échanges d'énergie avec l'extérieur), $dQ = 0$ et l'on a :

$$dS = d_i S \geq 0.$$

1.A.5. – EXPRESSION DES ÉQUATIONS LOCALES DE BILANS EN
COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Coordonnées : x (composante U), r (composante V)
 θ (composante W).

Équation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0.$$

Équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ = \frac{F_x}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W}{r} \\ = \frac{F_r}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{VW}{r} \\ = \frac{F_\theta}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{r^2} \right\} \end{aligned}$$

Équation d'énergie (avec $P = 0$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = a \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right\} + \Phi$$

Fonction de dissipation, cas axisymétrique

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{V^2}{r^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right\}$$