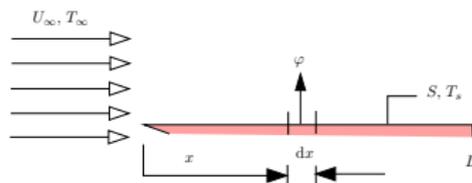
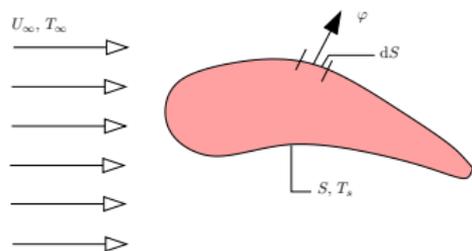


## Transferts de chaleur et de masse : Objectifs

- ▶ Faire comprendre les mécanismes de transferts par convection
- ▶ Mettre en évidence et présenter des outils de calcul des transferts par convection

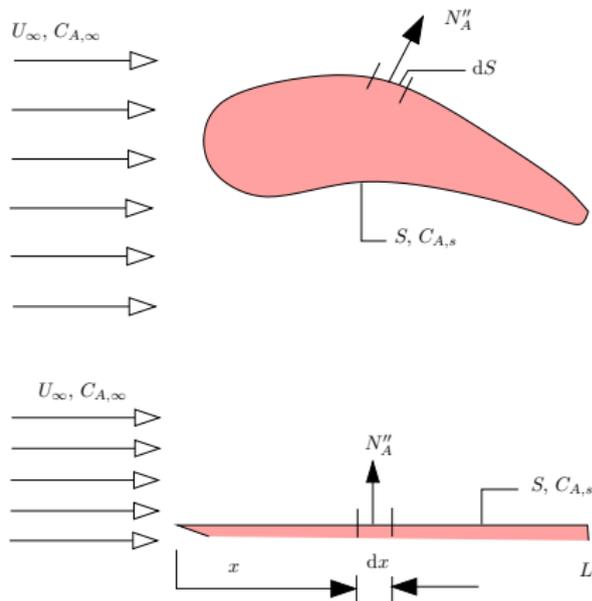
## Convection thermique



- ▶ Intensité locale du flux thermique  $\varphi = h(T_s - T_\infty)$
- ▶  $h$  : coefficient local de convection thermique
- ▶ Flux thermique total :  $\Phi = \int_S \varphi dS$
- ▶ Si  $T_s = \text{Cte}$ ,  $\Phi = (T_s - T_\infty) \int_S h dS$
- ▶ Coefficient moyen de convection,  $\bar{h}$  :  
 $\Phi = \bar{h}S(T_s - T_\infty)$
- ▶ Définition :  $\bar{h} = \frac{1}{S} \int_S h dS$
- ▶ Cas d'une plaque plane :  $\bar{h} = \frac{1}{L} \int_S h dx$

## Convection de masse

Écoulement d'un fluide de l'espèce A, à une concentration  $C_{A,\infty}$  (dans un mélange binaire A+B) sur une surface maintenue à une uniforme concentration  $C_{A,s} \neq C_{A,\infty}$



- ▶  $h_m$  (m/s) : coefficient de transfert de masse par convection.
- ▶  $N''_A$  (kmol/s.m<sup>2</sup>) : flux molaire de l'espèce A
- ▶  $N''_A = h_m(C_{A,s} - C_{A,\infty})$ ,
- ▶  $C$  mesuré par kilogrammemol/m<sup>3</sup>(= kmol/m<sup>3</sup>)
- ▶ Flux molaire total :  $N_A = \int_S N''_A dS$
- ▶ ou  $N_A = \overline{h_m} S (C_{A,s} - C_{A,\infty})$
- ▶ Définition :  $\overline{h_m} = \frac{1}{S} \int_S h_m dS$
- ▶ Cas d'une plaque plane :  $\overline{h_m} = \frac{1}{L} \int_S h_m dx$

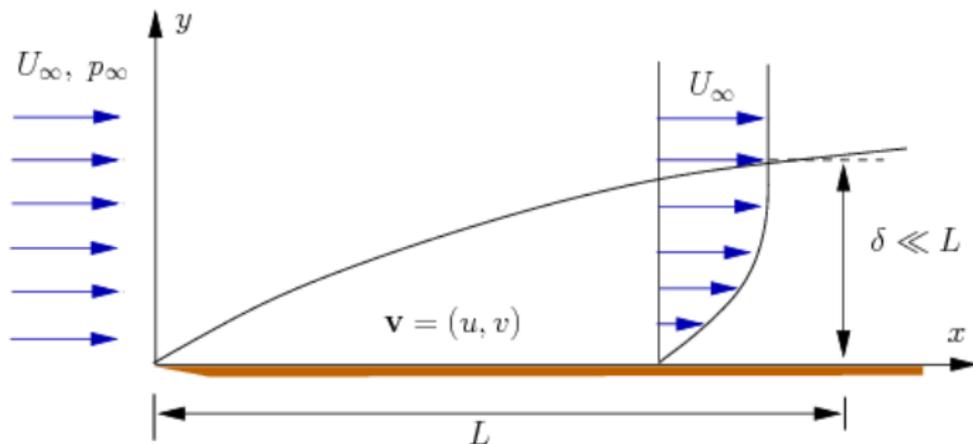
## Transfert de masse

- ▶ Transfert d'espèces peut s'exprimer en intensité du flux de masse  $n_A''$  (kg/s.m<sup>2</sup>) ou en flux de masse  $n_A$  (kg/s).
- ▶ En multipliant les équations précédentes par la masse molaire  $\mathcal{M}_A$  (kg/kmol) pour l'espèce A, l'on obtient les relations correspondantes :
- ▶  $\rho_A = \mathcal{M}_A C_A$ , (kg/m<sup>3</sup>) masse volumique de l'espèce A.
- ▶  $n_A'' = h_m(\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty})$
- ▶  $n_A = \bar{h}_m S(\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty})$
- ▶ La concentration  $C$  est déterminé en notant l'équilibre thermodynamique à l'interface entre les phases gaz et liquide ou solide.
- ▶ À un tel état d'équilibre, la température de vapeur à l'interface est égale à la température de surface  $T_s$ .
- ▶ Il s'agit alors de l'*état de saturation*.

## Couches limites en convection

Le transfert de chaleur et de masse a lieu dans une région limitrophe à la surface sur lequel le fluide s'écoule. On appelle cette région la couche limite. Il existe alors trois couches limites interdépendantes :

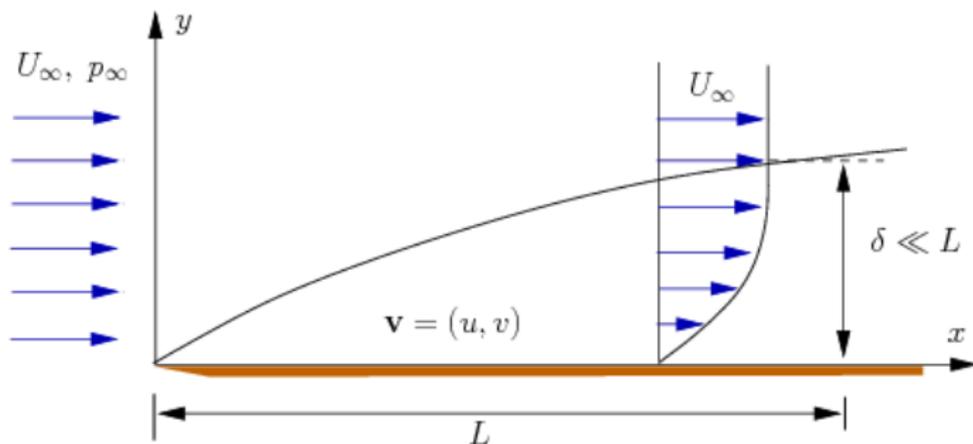
- ▶ La couche limite dynamique
- ▶ La couche limite thermique
- ▶ La couche limite de concentration



### Couche limite sur une plaque plane.

- ▶ Particules fluides en  $y = 0$  immobiles relativement à la plaque.
- ▶ L'écoulement près de la paroi est ralenti,
- ▶ Le gradient de vitesse normal à la paroi  $\partial u / \partial y$  est grand.
- ▶ Dans une zone "mince", (dite la Couche Limite) :

$$\vec{v}(y = 0) = \vec{0} \implies \vec{v}(y = \delta) = U_\infty \vec{x}$$

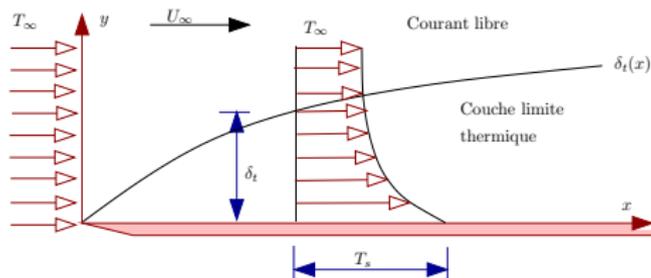


### Couche limite sur une plaque plane.

- ▶ La contrainte de cisaillement à la paroi :  $\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{paroi}}$

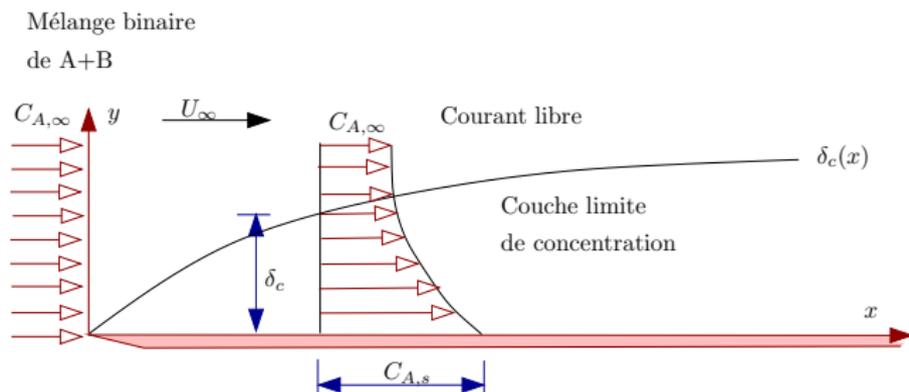
- ▶ Coefficient de frottement :  $C_f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{paroi}}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$

## Couche limite thermique



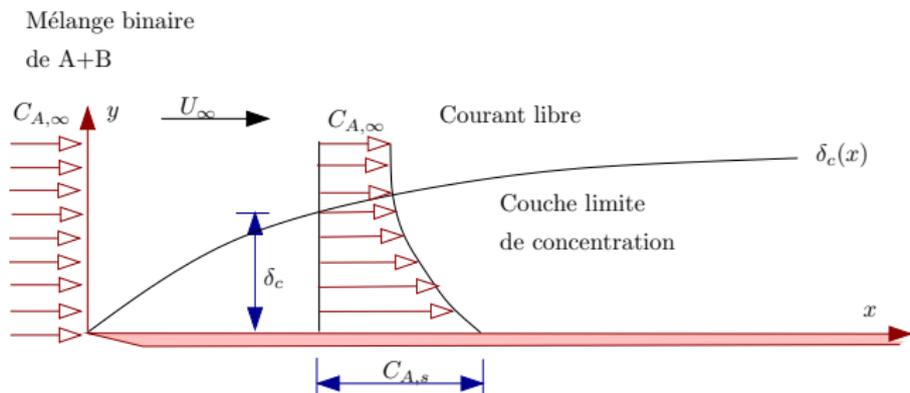
- ▶ Une **couche limite thermique** se forme si  $T_s \neq T_\infty$ ,
  - ▶ Épaisseur de couche limite thermique  $\delta_t$ ,
  - ▶  $T(y = 0) = T_s$ ,  $T(y = \delta_t) = T_\infty$ ,
  - ▶ D'après la loi de Fourier, au sein du fluide :  $\varphi_s(x, y = 0) = -\lambda_{\text{fluide}} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$
- $$h(x) = \frac{-\lambda_{\text{fluide}}(\partial T / \partial y)_{y=0}}{T_s - T_\infty},$$
- ▶ Remarque :  $\delta_t$  augmente avec  $x \implies (\partial T / \partial y)_{y=0}$  et  $h$  décroissent avec  $x$ .

## Couche limite de concentration



- ▶ Dès que  $C_{A,\infty} \neq C_{A,s}$  une couche limite se forme.
- ▶ Épaisseur de couche limite de concentration  $\delta_c$ ,
- ▶  $C_A(x, y = 0) = C_{A,s}$ ,  $C_A(x, y = \delta_c) = C_{A,\infty}$ ,
- ▶ La loi de Ficks :  $\vec{N}_A'' = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial n} \vec{n}$
- ▶  $D_{AB}$  : Coefficient de diffusion binaire (de mélange binaire A + B ).
- ▶ En  $y = 0$ ,  $N_{AB}'' = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial y} \Big|_{y=0} \implies h_m = \frac{-D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial y} \Big|_{y=0}}{C_{A,s} - C_{A,\infty}}$

## Couche limite de concentration



- ▶ Concentration totale  $C = C_A + C_B$ .
- ▶ En multipliant par la masse molaire de l'espèce  $\mathcal{M}_A$ , il vient :

- ▶ La loi de Ficks :  $\vec{n}_A'' = -D_{AB} \frac{\partial \rho_A}{\partial n} \vec{n}$

- ▶ En  $y = 0$ , 
$$h_m = \frac{-D_{AB} \left. \frac{\partial \rho_A}{\partial y} \right|_{y=0}}{\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty}}$$

## Remarques

- ▶ Dès qu'un fluide s'écoule sur une surface, une couche limite dynamique, d'épaisseur  $\delta(x)$ , se forme.
- ▶ Une couche limite thermique, d'épaisseur  $\delta_t(x)$ , n'existe que lorsqu'il y a un écart de température entre les valeurs respectives à la surface et au courant libre,
- ▶ Une couche limite de concentration, d'épaisseur  $\delta_c(x)$ , n'existe que lorsqu'il y a un écart de concentration entre les valeurs respectives à la surface et au courant libre,
- ▶  $\delta(x)$ ,  $\delta_t(x)$  et  $\delta_c(x)$  varient de la même manière avec  $x$ , mais n'ont pas la même valeur à la même location  $x$ .

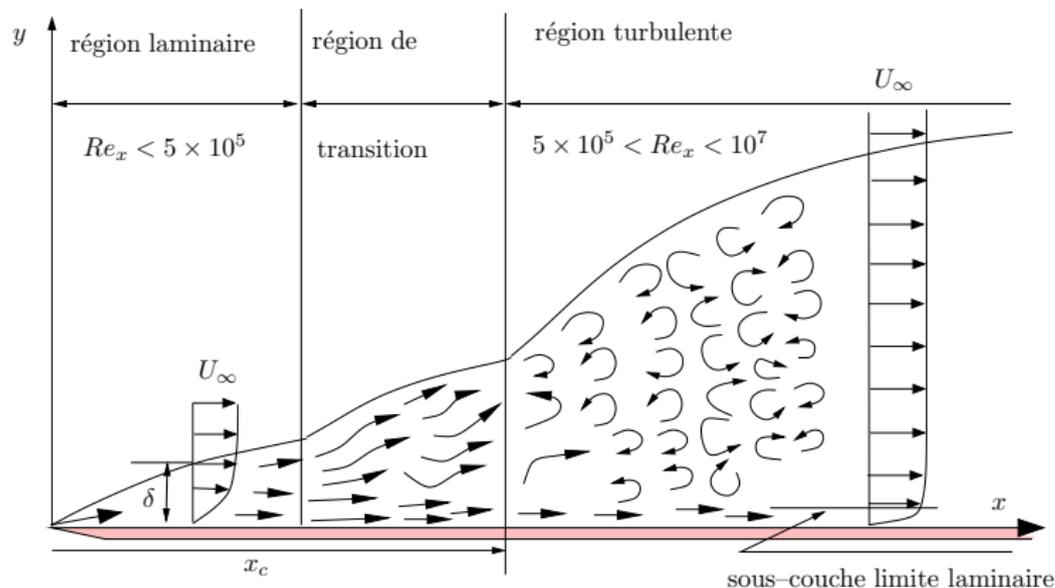
## Résumé : coefficients de transferts

Pour l'ingénieur : - paramètres pratiques associés à la couche limites :

- ▶ Coefficient de frottement :  $C_f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{paroi}}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$ ,
- ▶ Coefficient de transfert thermique :  $h = \frac{-\lambda_{\text{fluide}} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$ ,
- ▶ Coefficient de transfert de masse :  $h_m = \frac{-D_{AB} \left. \frac{\partial \rho_A}{\partial y} \right|_{y=0}}{\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty}}$

## Écoulement laminaire et turbulent

- ▶ Avant de traiter un problème de convection il faut d'abord déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent
- ▶ L'exemple de l'écoulement sur une plaque plane.

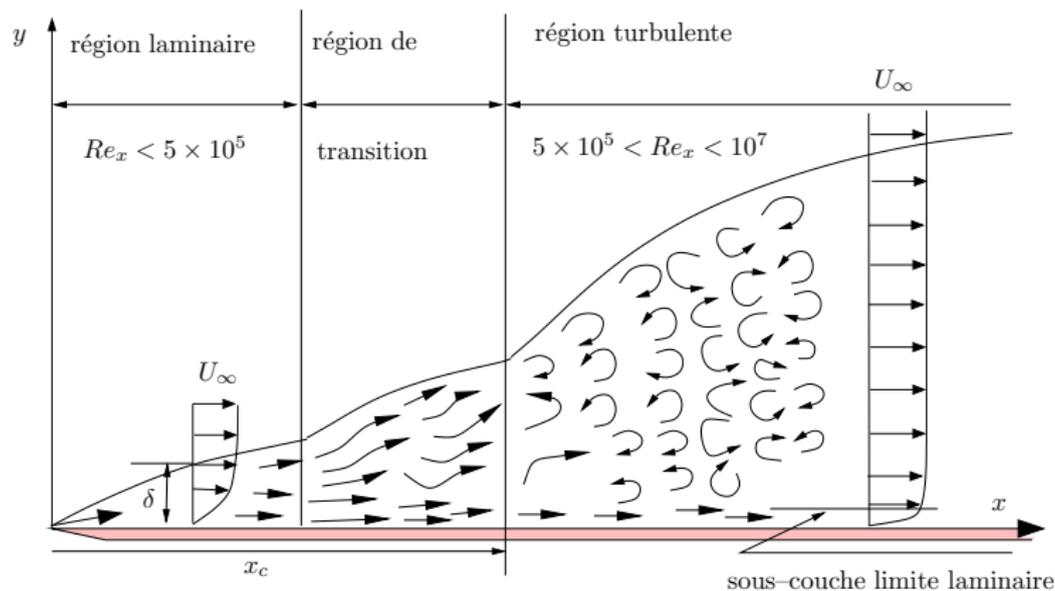


## Écoulement laminaire et turbulent

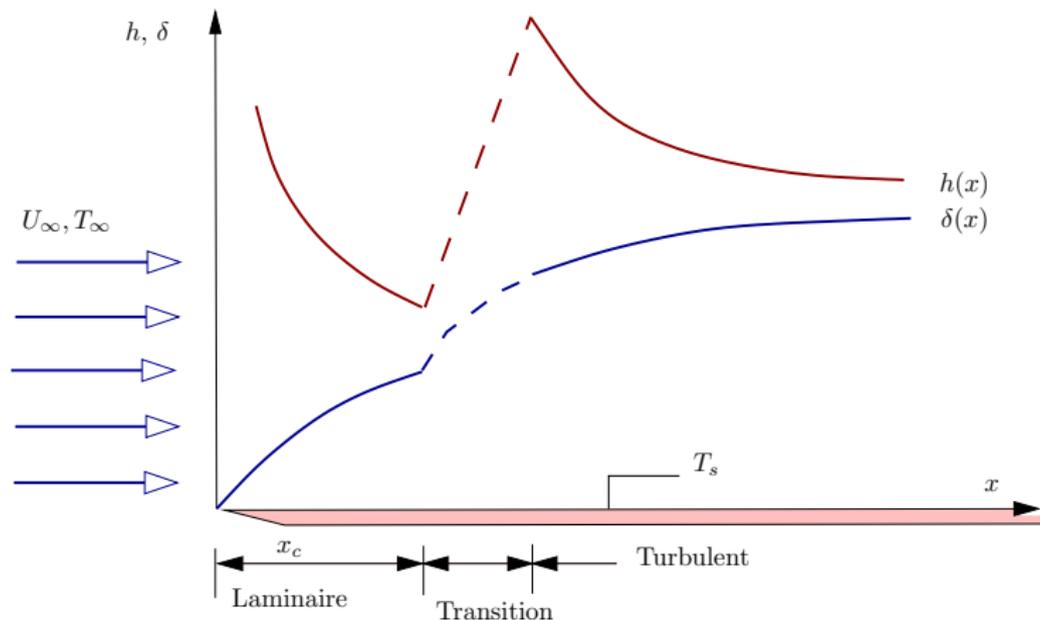
- ▶ Si  $x$  est dans la direction de l'écoulement et  $y$  est normal à la surface,

- ▶  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \gg \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ .

- ▶ Écoulement laminaire si  $Re_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} < Re_c = \frac{\rho U_\infty x_c}{\mu} \simeq 5 \times 10^5$



## Écoulement laminaire et turbulent sur une plaque plane



- Schématique représentation de l'évolution de l'épaisseur de couche limite  $\delta(x)$  et le coefficient local de transfert thermique par convection  $h(x)$  pour l'écoulement sur une plaque plane isotherme.

Équation de la couche limite dynamique,  $\rho \simeq \text{Cte.}$ ,  $\mu \simeq \text{Cte.}$

Continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

x – mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \overbrace{X}^{\text{force volumique}} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

y – mouvement :

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} + \overbrace{Y}^{\text{force volumique}} \quad (3)$$

## Équation de la couche limite thermique

## Équation de la conservation de l'énergie

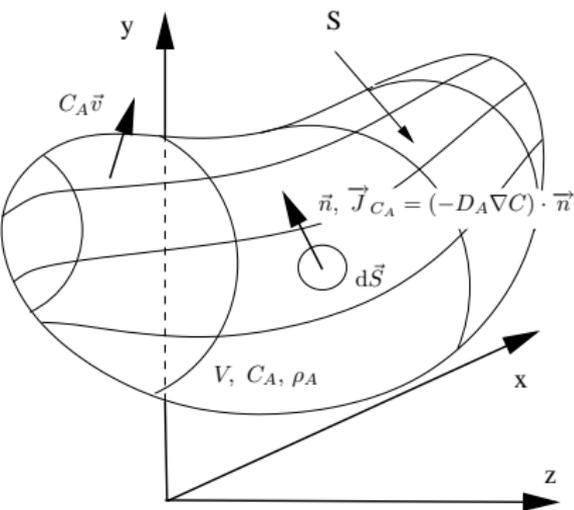
$$\rho \left\{ \begin{array}{l} \text{stockage} \\ \text{d'énergie} \\ \frac{De}{Dt} \end{array} - \begin{array}{l} \text{travail de forces} \\ \text{de pression} \\ \left[ -\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] \end{array} \right\} = \underbrace{\nabla(\lambda \nabla T)}_{\text{chaleur reçue par conduction}} + \underbrace{\Phi}_{\text{dissipation thermique due à la viscosité}}$$

- ▶ Si  $\rho \simeq \text{Cte.}$  et  $\mu \simeq \text{Cte.}$  :  $c_v = c_p = c$ ,  $de = c_v dT = c_p dT = cdT$
- ▶ Si  $\lambda \simeq \text{Cte.}$  :

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \Phi$$

- ▶ Rappel :  $\Phi = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2$ .
- ▶ En notant  $\alpha = \lambda/\rho c$ , on obtient, finalement pour l'équation de la couche limite thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{c\rho} \Phi$$

Équation de conservation de masse de l'espèce A, de concentration  $C_A$ 

- ▶  $V$  : un volume de fluide fixé dans l'espace,
- ▶  $V$  est délimité par la surface  $S$ .
- ▶  $\vec{n}$  : vecteur unité normale extérieur à  $S$
- ▶ Flux de diffusion de l'espèce A :  
loi de Ficks  $\vec{J}_{C_A} = -D_A \nabla C_A$
- ▶  $D_A$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) : le coefficient de diffusion de l'espèce A.
- ▶ Flux de convection de l'espèce A :  $C_A \vec{v}$
- ▶ Flux total :  $C_A \vec{v} - D_A \nabla C_A$
- ▶ Sources de masse de l'espèce A ( $\text{kmol}/\text{m}^3 \cdot \text{s}$ ) :  $\dot{N}_A$

- Bilan de masse pour l'espèce A dans V :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V C_A dV}_{\text{variation temporelle de la masse dans V}} = \underbrace{-\oiint_S (C_A \vec{v} - D_A \nabla C_A) \cdot \vec{n} dS}_{\text{flux de masse à travers S}} + \underbrace{\iiint_V \dot{N}_A dV}_{\text{Sources de masse de l'espèce A}}$$

- Comme V étant fixé :  $\frac{d}{dt} \iiint_V C_A dV = \iiint_V \frac{\partial C_A}{\partial t} dV$
- En appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradsky :

$$\iiint_V \left( \frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot (C_A \vec{v} - D_A \nabla C_A) - \dot{N}_A \right) dV = 0$$

- D'où :  $\frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot (C_A \vec{v} - D_A \nabla C_A) - \dot{N}_A = 0$
- En multipliant par  $\mathcal{M}_A$ , et en réarrangeant :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_A \vec{v}) = \nabla \cdot (D_A \nabla \rho_A) + \dot{n}_A$$

## Équation de la couche limite de concentration, en 2D

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_A \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial y} \left( D_A \frac{\partial \rho_A}{\partial y} \right) + \dot{n}_A$$

## Couche limite et paramètres de similitude

## Grandeurs caractéristiques

- ▶ Longueur caractéristique :  $L$
- ▶ Vitesse caractéristique :  $U_\infty$
- ▶ Différence caractéristique de température :

$$\Delta T = T_\infty - T_s$$

- ▶ Différence caractéristique de concentration :

$$\Delta C_A = C_{A,\infty} - C_{A,s}$$

## Grandeurs sans dimensions

- ▶  $(x^*, y^*) \equiv (x/L, y/L)$
- ▶  $(u^*, v^*) \equiv (u/U_\infty, v/\infty)$
- ▶  $T^* = (T - T_s)/\Delta T$
- ▶  $C_A^* = (C_A - C_{A,s})/\Delta C_A$
- ▶  $\rho^* = \rho/\rho U_\infty^2$

## Paramètres de similitude

- ▶ Le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de visqueuses}} = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

- ▶ Le nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\text{Diffusion visqueuse}}{\text{Diffusion thermique}} = \frac{\nu}{\alpha}$$

- ▶ Le nombre de Schmidt :

$$Sc = \frac{\text{Diffusion visqueuse}}{\text{Diffusion de masse}} = \frac{\nu}{D_{AB}}$$

## Forme fonctionnelle de solutions

- ▶  $u^* = \mathcal{F}_1 \left( x^*, y^*, Re_L, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$
- ▶  $C_f = \mathcal{F}_2 (x^*, Re_L)$
- ▶  $T^* = \mathcal{F}_3 \left( x^*, y^*, Re_L, Pr, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$

## Paramètre de similitude liés aux transferts par convection

## ► Le nombre de Nusselt.

► Commençons par  $h$  :

$$h = \frac{-\lambda_{\text{fluide}} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{(T_s - T_\infty)} = \frac{-\lambda_{\text{fluide}} (T_\infty - T_s)}{L(T_s - T_\infty)} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \frac{\lambda_{\text{fluide}}}{L} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} > 0$$

$$\text{► Alors, } Nu = \frac{hL}{\lambda_{\text{fluide}}} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} > 0$$

$$\text{► } Nu = \mathcal{F}_4(x^*, Re_L, Pr)$$

$$\text{► } \overline{Nu} = \frac{\overline{h}L}{\lambda_{\text{fluide}}} = \mathcal{F}_5(Re_L, Pr)$$

## ► De la même manière :

$$C_A^* = \mathcal{F}_6\left(x^*, y^*, Re_L, Sc, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$$

$$\text{► } h_m = \frac{D_{AB}}{L} \left. \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} > 0$$

## ► Le nombre de Sherwood :

$$Sh = \frac{h_m L}{D_{AB}} = \left. \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0}$$

$$\text{► } Sh = \mathcal{F}_7(x^*, Re_L, Sc)$$

$$\text{► } \overline{Sh} = \frac{\overline{h_m} L}{D_{AB}} = \mathcal{F}_8(Re_L, Sc)$$

# Équations de couches limites sous forme adimensionnelle

## Forces volumique supposées négligeables

- ▶ Couche limite dynamique :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (1)$$

- ▶ Couche limite thermique :

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr Re_L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (2)$$

- ▶ Couche limite de concentration :

$$u^* \frac{\partial C_A^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Sc Re_L} \frac{\partial^2 C_A^*}{\partial y^{*2}} \quad (3)$$

## Remarques

- ▶ Équations (2) et (3) sont analogues
- ▶ Les conditions aux limites associées, sous forme sans dimensions sont elles aussi analogues.
- ▶ Par conséquent :
  - $T^* = \mathcal{F}_3 \left( x^*, y^*, Re_L, Pr, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$  et
  - $C_A^* = \mathcal{F}_5 \left( x^*, y^*, Re_L, Sc, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$
 sont analogues et de la même forme.
- ▶  $Nu = \mathcal{F}_4(x^*, Re_L, Pr)$  (respectivement  $\overline{Nu}$ ) et  $Sh = \mathcal{F}_7(x^*, Re_L, Sc)$  (resp.  $\overline{Sh}$ ) sont aussi analogues et de la même forme.

## Critère d'analogies des couches limites

## Équations de couches limites

Couche limite	Équation de conservation	Conditions aux limites		paramètres de similitude
		paroi	courant libre	
Dynamique	$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$	$u^*(x^*, 0) = 0,$ $v^*(x^*, 0) = 0$	$u^*(x^*, \infty) = \frac{u}{U_\infty} = 1$	$Re_L = \frac{LU_\infty}{\nu}$
Thermique	$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr Re_L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$	$T^*(x^*, 0) = 0$	$T^*(x^*, \infty) = 1$	$Re_L, Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
Concentration	$u^* \frac{\partial C_A^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Sc Re_L} \frac{\partial^2 C_A^*}{\partial y^{*2}}$	$C_A^*(x^*, 0) = 0$	$C_A^*(x^*, \infty) = 1$	$Re_L, Sc = \frac{\nu}{D_{AB}}$

- ▶ Les équations de couches limites sous forme sans dimensions ainsi que les conditions aux limites associées sont très semblables l'une à l'autre.
- ▶ Ces formes semblables conduisent aux analogies différentes entre elles.

## Analogie entre les transferts de chaleur et de masse - I

Couche limite	Équation de conservation	Conditions aux limites		paramètres de similitude
		paroi	courant libre	
Dynamique	$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$	$u^*(x^*, 0) = 0,$ $v^*(x^*, 0) = 0$	$u^*(x^*, \infty) = \frac{u}{U_\infty} = 1$	$Re_L = \frac{LU_\infty}{\nu}$
Thermique	$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$	$T^*(x^*, 0) = 0$	$T^*(x^*, \infty) = 1$	$Re_L, Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
Concentration	$u^* \frac{\partial C_A^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 C_A^*}{\partial y^{*2}}$	$C_A^*(x^*, 0) = 0$	$C_A^*(x^*, \infty) = 1$	$Re_L, Sc = \frac{\nu}{D_{AB}}$

- ▶  $Pr$  et  $Sc$  sont analogue mais ils ne sont pas égales.
- ▶ À rappeler :  $Nu$  et  $Sh$  sont des paramètres sans dimensions des gradients de  $T^*$  et  $C_A^*$ .
- ▶ En connaissant l'équation pour  $Nu$  (respectivement  $Sh$ ), on peut en déduire l'équation pour  $Sh$  (resp.  $Nu$ )
  - ▶ On remplace  $Nu$  (resp..  $Sh$ ) par  $Sh$  (resp.  $Nu$ ) et  $Pr$  (resp.  $Sc$ ) par  $Sc$  (resp.  $Pr$ )
- ▶ Pour la même forme géométrique, la même position sans dimensions  $x^*$  et  $Re_L$ , on peut utiliser la solution du problème de transfert thermique pour le problème du transfert de masse.

## Analogie entre les transferts de chaleur et de masse - II

Écoulement fluide	Transfert thermique	Transfert de masse
$u^* = \mathcal{F}_1 \left( x^*, y^*, Re_L, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$ $C_f = \frac{2}{Re_L} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right _{y^*=0}$ $C_f = \mathcal{F}_2 (x^*, Re_L)$	$T^* = \mathcal{F}_3 \left( x^*, y^*, Re_L, Pr, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$ $Nu = \frac{hL}{\lambda} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _{y^*=0} > 0$ $Nu = \mathcal{F}_4 (x^*, Re_L, Pr)$ $\overline{Nu} = \frac{\overline{h}L}{\lambda_{\text{fluide}}} = \mathcal{F}_5 (Re_L, Pr)$	$C_A^* = \mathcal{F}_5 \left( x^*, y^*, Re_L, Sc, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$ $Sh = \frac{h_m L}{D_{AB}} = \left. \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} \right _{y^*=0} > 0$ $Sh = \mathcal{F}_7 (x^*, Re_L, Sc)$ $\overline{Sh} = \frac{\overline{h}_m L}{D_{AB}} = \mathcal{F}_8 (Re_L, Sc)$

- ▶ À rappeler : les forme fonctionnelles de  $Nu$  et  $Sh$ .
- ▶  $Nu$  et  $Sh$  sont en général proportionnelles aux puissances de  $Pr$  et  $Sc$ , respectivement.
- ▶ En générale :

$$Nu = f(x^*, Re_x) Pr^n, \quad Sh = f(x^*, Re_x) Sc^n \quad \text{on trouve souvent} \quad n = 1/3$$

- ▶ D'où :  $\frac{Nu}{Pr^n} = \frac{Sh}{Sc^n}$
- ▶ On en déduit alors :  $\frac{h}{h_m} = \frac{\lambda L}{D_{AB} Le^n} = \rho c_p Le^{1-n}$  où :  $Le = \alpha / D_{AB}$ , est le nombre de Lewis.

## Cas particulier

- ▶ Si  $Pr = Sc$  :
  - ▶  $Nu = Sh$
  - ▶  $T^* = C_A^*$

## Analogie de Reynolds- I

Couche limite	Équation de conservation	Conditions aux limites		paramètres de similitude
		paroi	courant libre	
Dynamique	$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$	$u^*(x^*, 0) = 0$ $v^*(x^*, 0) = 0$	$u^*(x^*, \infty) = \frac{u}{U_\infty} = 1$	$Re_L = \frac{LU_\infty}{\nu}$
Thermique	$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr Re_L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$	$T^*(x^*, 0) = 0$	$T^*(x^*, \infty) = 1$	$Re_L, Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
Concentration	$u^* \frac{\partial C_A^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Sc Re_L} \frac{\partial^2 C_A^*}{\partial y^{*2}}$	$C_A^*(x^*, 0) = 0$	$C_A^*(x^*, \infty) = 1$	$Re_L, Sc = \frac{\nu}{D_{AB}}$

► Si  $\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0$ ,  $Pr = Sc = 1$  :

- les trois équations, ainsi que les conditions aux limites associées, auront exactement la même forme,
- la même solution est obtenue pour les trois variables :  $u^* = T^* = C_A^*$

## Analogie de Reynolds- II

Écoulement fluide	Transfert thermique	Transfert de masse
$u^* = \mathcal{F}_1 \left( x^*, y^*, Re_L, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$	$T^* = \mathcal{F}_3 \left( x^*, y^*, Re_L, Pr, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$	$C_A^* = \mathcal{F}_5 \left( x^*, y^*, Re_L, Sc, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$
$C_f = \frac{2}{Re_L} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right _{y^*=0}$	$Nu = \frac{hL}{\lambda} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _{y^*=0} > 0$	$Sh = \frac{h_m L}{D_{AB}} = \left. \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} \right _{y^*=0} > 0$
$C_f = \mathcal{F}_2(x^*, Re_L)$	$Nu = \mathcal{F}_4(x^*, Re_L, Pr)$	$Sh = \mathcal{F}_7(x^*, Re_L, Sc)$
	$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{\lambda_{\text{fluide}}} = \mathcal{F}_5(Re_L, Pr)$	$\overline{Sh} = \frac{\bar{h}_m L}{D_{AB}} = \mathcal{F}_8(Re_L, Sc)$

► De plus :  $\left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \left. \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0}$ .

► D'où l'analogie de Reynolds :  $\frac{Re}{2} C_f = Nu = Sh$

► Remarque : les trois conditions

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0, \quad Pr = Sc = 1$$

sont très restrictives.

## Les analogies de Chilton-Colburn

- ▶ L'analogie de Reynolds :  $\frac{Re}{2} C_f = Nu = Sh$
- ▶ L'analogie de Reynolds réécrite en fonction de nombres de Stanton ( $St$ ) et de Stanton de transfert de masse ( $St_m$ ) :

$$\frac{Re}{2} C_f = St Re Pr = St_m Re Sc \left\{ \begin{array}{l} St = \frac{Nu}{Pr Re} = \frac{h}{\rho U_\infty c_p} \\ St_m = \frac{Sh}{Re Sc} = \frac{h_m}{U_\infty} \end{array} \right. \implies \frac{C_f}{2} = St Pr = St_m Sc$$

- ▶ L'analogie de **Chilton-Colburn** modifie légèrement l'analogie de **Reynolds** en y ajoutant les puissances en  $Pr$  et  $Sc$  :

$$\boxed{\frac{C_f}{2} = St Pr^{2/3} \equiv j_H}, \quad \boxed{\frac{C_f}{2} = St_m Sc^{2/3} \equiv j_m} \quad \longleftarrow \quad \begin{array}{l} \text{à utiliser dans le calcul,} \\ \text{(au lieu de l'analogie de Reynolds)} \end{array}$$

- ▶ Analogie conditionnée par :

$0,6 < Pr < 60$  pour  $j_H$  peut être utiliser pour les valeurs locales et moyennes

$0,6 < Sc < 3000$  pour  $j_m$

écoulement laminaire :  $\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \sim 0$ , (écoulements turbulents : pas de restriction sur  $\frac{\partial p^*}{\partial x^*}$ )