

Théorie de l'analyse limite

STABILITE DES STRUCTURES DU SOL EN UTILISANT DES METHODES LIMITES

2.1 Introduction

Les solutions aux problèmes de la mécanique doivent satisfaire trois conditions d'équilibre, de compatibilité et de propriétés du matériau. Il est assez évident que des solutions complètes, satisfaisant ces conditions avec les propriétés matérielles pour le sol, seront très difficiles à obtenir, même pour de très simples fondations et talus.

Tout d'abord, on considère les conditions de rupture ultime où la propriété importante du matériau est la résistance du sol. Il est nécessaire de distinguer entre les cas de chargement non drainé et drainé. Pour le chargement non drainé, la résistance ultime du sol est donnée par

$$\tau = c_u \quad (2.1)$$

Où c_u est la cohésion non drainée. Pour les chargements drainés où les pressions interstitielles peuvent être déterminées à partir des conditions hydrostatiques des eaux souterraines ou à partir d'un régime d'infiltration stable, la résistance est donnée par:

$$\tau' = \sigma' \tan \theta'_c \quad (2.2)$$

Où θ'_c est l'angle de frottement de l'état critique. Ces résistances donnent les états ultimes de rupture. Pour concevoir des structures stables ou pour limiter les mouvements du terrain, elles peuvent être réduites d'un facteur F_s ,

Même avec ces expressions relativement simples pour la résistance du sol il est encore assez difficile d'obtenir des solutions complètes et les méthodes standard utilisées dans le génie géotechnique impliquent des simplifications. Il y a deux méthodes de base: la méthode d'analyse limite qui sera décrite dans ce cours et la méthode d'équilibre limite étudiée dans le parcours de licence. Les deux méthodes nécessitent des approximations et des simplifications qui seront discutées en temps voulu.

2.2 Théorèmes de la rupture plastique

Afin de simplifier les calculs de stabilité, il est possible d'ignorer certaines des conditions d'équilibre et de compatibilité et d'utiliser des théorèmes importants de rupture plastique. Il s'avère qu'en ignorant la condition d'équilibre, on peut calculer une limite supérieure aux charges de rupture de sorte que si la structure est chargée à cette valeur, elle doit s'effondrer, de même, en ignorant la condition de compatibilité, on peut calculer une borne inférieure à la charge de rupture de sorte que si la structure est chargée à cette valeur, elle ne peut pas s'effondrer. De toute évidence, la vraie charge de rupture doit se trouver entre ces charges.

La caractéristique essentielle des calculs de la limite supérieure est qu'il existe des démonstrations rigoureuses qui montrent qu'elles vont fixer la vraie charge d'effondrement. Ainsi, bien que les deux méthodes de calcul aient été simplifiées en ignorant, pour la première l'équilibre et pour la seconde la compatibilité, aucune hypothèse majeure n'est nécessaire (autre que celles requises pour prouver les théorèmes liés). Ce qui a été perdu en rendant les calculs simples, c'est la certitude; Tout ce qu'on a sont des limites supérieure et inférieure et on ne connaît pas la vraie charge d'effondrement (sauf si on peut obtenir des limites supérieure et inférieure égales). Habituellement, on peut obtenir des limites supérieures et inférieures qui sont assez proches l'une de l'autre si le degré d'incertitude est assez faible.

On ne va pas démontrer ici les théorèmes de rupture plastique mais on va simplement citer les résultats. Une condition requise pour prouver les théorèmes est que le matériau doit être parfaitement plastique. Cela signifie qu'à la rupture, le sol doit être soumis à une contrainte constante avec une règle d'écoulement associée de sorte que le vecteur de l'incrément de déformation plastique soit normal à la surface de charge. La première condition, (contrainte à état constant), est remplie par des sols à leur état ultime ou critique, donnés par les équations (2.1) et (2.2). La deuxième condition est illustrée sur la figure 2.1 (a) pour la charge non drainée et sur la figure 2.1 (b) pour la charge drainée.

Dans les deux cas, les déformations élastiques doivent être nulles car les contraintes restent constantes; Ainsi les déformations totales et plastiques sont les mêmes. Pour le chargement non drainé, l'enveloppe de rupture donnée par l'équation (2.1) est horizontale et les déformations volumétriques sont nulles (parce que non drainé signifie volume constant) et donc le vecteur de la déformation plastique $\delta\varepsilon^p$ est normal à la surface de charge comme montré. Pour un chargement drainé, la surface de charge est donnée par l'éq. (2.2) et la règle d'écoulement est associée à l'angle de dilatation à l'état critique Ψ_c est

$$\delta\varepsilon_n^p / \delta Y_p = \tan \Psi_c = \tan \theta'_c \quad (2.3)$$

A l'état critique, cependant, les déformations du sol à l'état constant (c'est-à-dire à volume constant) et donc $\Psi_c = 0$, ce qui signifie qu'à la rupture l'état critique, la règle d'écoulement n'est pas associée et le sol en chargement drainée n'est pas parfaitement Plastique. Cela n'a pas vraiment d'importance car on peut prouver qu'une borne supérieure pour un matériau avec $\Psi_c = \theta'_c$ est encore est une limite supérieure, même si Ψ_c est inférieure à θ'_c , mais on ne peut pas faire la même chose pour la limite inférieure. En pratique, les limites supérieure et inférieure pour les structures du sol calculées avec $\Psi_c = \theta'_c$, donnent un bon accord avec les observations expérimentales et, bien que la solution de limite inférieure ne soit pas absolument rigoureuse, les erreurs semblent être faibles.

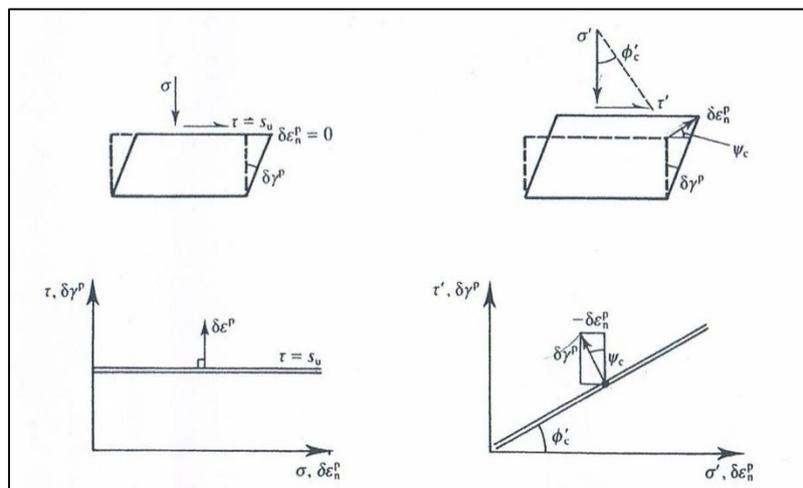


Figure 2.1 règle d'écoulement associée le vecteur de l'incrément de déformation plastique soit normal à la surface de charge pour le chargement drainé et non drainé
Les énoncés des théorèmes liés sont simples;

2.2.1 Limite supérieure.

Si on prend un mécanisme compatible de surface de glissement et on considère un accroissement de mouvement et si on arrive à montrer que le travail effectué par les contraintes dans le sol est égal au travail effectué par les charges externes, la structure doit s'effondrer (c'est-à-dire que les charges externes sont une limite supérieure aux vraies charges d'effondrement).

2.2.2 Limite inférieure.

Si on peut déterminer un ensemble de contraintes dans la zone qui est en équilibre avec les charges externes et ne pas dépasser la résistance du sol, la structure ne peut pas s'effondrer (c'est-à-dire les charges externes sont une borne inférieure aux vraies charges d'effondrement).

Pour calculer une limite supérieure, on doit satisfaire les conditions de compatibilité et les propriétés du matériau (qui régissent le travail effectué par les contraintes dans le sol), mais rien n'est dit au sujet de l'équilibre.

Pour calculer une limite inférieure, on doit satisfaire les conditions d'équilibre et les propriétés du matériau (qui déterminent la résistance), mais rien n'est dit au sujet des déplacements ou de la compatibilité.

Parce qu'une structure avec une charge supérieure doit s'effondrer ce qui est souvent connu sous le nom de charge dangereuse et une structure avec une limite inférieure ne peut pas s'effondrer ce qui est connu sous le nom de charge sécuritaire. Les principes de base de ces méthodes de

limite supérieure et de limite inférieure sont également utilisés pour calculer la stabilité des structures en portiques en utilisant des rotules plastiques pour créer des mécanismes ou en utilisant une analyse élastique pour calculer les contraintes élastiques limites aux sections critiques.

Dans le présent contexte, les termes limites supérieure et limites inférieure ont des significations très spécifiques associées aux théorèmes des limites. Les ingénieurs étudient également les conséquences des valeurs optimistes et pessimistes des propriétés des matériaux. Mais les bornes calculées de cette façon sont évidemment très différentes de la signification actuelle.

2.3 Mécanismes compatibles des surfaces de glissement

Pour calculer une limite supérieure, un mécanisme de surfaces de glissement doit satisfaire aux exigences de compatibilité. Ces exigences déterminent à la fois les surfaces de glissement individuelles admissibles de forme et leur disposition générale.

La figure 2.2b montre un segment d'une surface de glissement courbe représentée par une double ligne et la figure 2.2a représente un petit élément agrandi. D'un côté, le matériau est stationnaire et de l'autre côté, il y a un incrément de déplacement δw sous un angle Ψ . La longueur le long de la surface de glissement est constante, donc elle est nulle, les surfaces de glissement ont des angles α et β par rapport aux plans principaux majeurs où

$$\alpha = \beta = 45^\circ + \Psi/2 \quad (2.4)$$

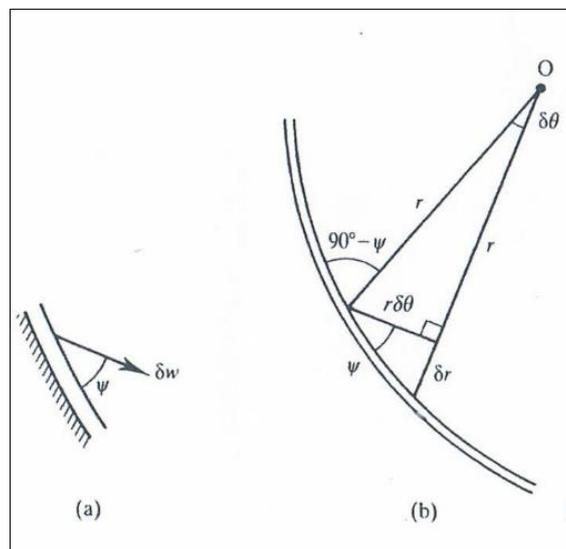


Figure 2.2 Géométrie d'un plan de glissement

De la géométrie de la fig.2.2 (b)

$$dr/rd\theta = \tan \Psi \quad (2.5)$$

Et donc

$$r_B/r_A = \exp(\Delta\theta \tan \Psi) \quad (2.6)$$

Où $\Delta\theta$ est l'angle entre les rayons r_B et r_A . C'est l'équation de la spirale logarithmique pour $\Psi > 0$ mais, pour la charge non drainée quand $\Psi = 0$,

$$r_B/r_A = \exp(0)=1 \quad (2.7)$$

C'est l'équation d'un arc de cercle. De plus, comme r_A tend vers l'infini, les équations (2.6) et (2.7) tendent vers l'équation d'une droite. Ainsi, pour la charge drainée où $\Psi = \theta'_c$ les surfaces de glissement peuvent être des droites ou des spirales logarithmiques tandis que pour la charge non drainée où $\Psi = 0$, les surfaces de glissement peuvent être des droites ou des arcs de cercle, dans la figure 2.2 (b) les rayons intersectent la surface de glissement courbée à un angle constant ($90 - \Psi$) et donc les rayons peuvent également être des surfaces de glissement.

Les surfaces de glissement peuvent être assemblées pour former un mécanisme compatible d'effondrement; Un certain nombre de mécanismes simples sont illustrés à la fig. 2.3. Ils peuvent consister en des lignes droites ou des courbes (arcs circulaires pour le chargement non drainé avec $\Psi = 0$ ou spirales logarithmiques pour les charges drainées avec ($\Psi_c = \theta'_c$) ou des combinaisons de droites et de courbes. Notons que dans la figure 2.3 (f) la section incurvée est en fait un éventail avec une surface de glissement radiale et ceux-ci sont nécessaires pour rendre le mécanisme compatible en construisant un diagramme de déplacement.

2.4 Travaux effectués par des contraintes internes et des charges externes

Pour déterminer une borne supérieure, il est nécessaire de calculer le travail effectué par les contraintes internes et par les charges externes pendant un incrément de mouvement de mécanisme compatible. Le travail réalisé par la force est simplement le produit de la force et l'incrément de déplacement effectuée dans la direction de la force. Nous pouvons toujours déterminer les incréments de déplacements, effectués dans n'importe quelle direction, à partir d'un diagramme de déplacement.

Les charges extérieures proviennent de forces concentrées provenant de petites fondations, à partir de contraintes réparties sous des talus, de larges fondations et à partir du poids propre du sol. Les charges extérieures provenant de forces concentrées sont faciles à déterminer et sont les mêmes pour les charges drainées et non drainées, mais pour les contraintes réparties, les charges drainées et non drainées doivent être considérées séparément. La figure 2.4 montre un

élément de sol avec un poids unitaire γ et avec une contrainte totale p et une charge concentrée F sur la surface supérieure où la pression interstitielle est U . il s'agit d'un incrément de déplacement δw dans la direction de la contrainte de surface, de la charge concentrée et du poids propre. Pour le chargement non drainé, l'augmentation du travail est :

$$\delta E = F \delta w + pA \delta w + \gamma V \delta w \quad (2.8)$$

Pour le chargement drainé, l'eau reste stationnaire, de sorte que le travail est effectué uniquement par les contraintes effectives; Par conséquent

$$\delta E = F \delta w + (p-U)A \delta w + (\gamma - \gamma_w)V \delta w \quad (2.9)$$

Pour les sols sec mettre simplement $U = \gamma_w = 0$ dans l'équation (2.9)

Le travail effectué par les contraintes internes est le travail dissipé par la déformation plastique dans le matériau dans les minces surfaces de glissement qui composent le mécanisme compatible et, encore une fois, le chargement non drainé et drainé doit être considéré séparément. La figure 2.5 montre de courtes longueurs de surfaces de glissement qui ont des incréments de déplacement δw comme montré. Etant donné que le sol est à l'état critique dans chaque cas, les contraintes sont données par les équations (2.1) et (2.2) et, pour les chargements drainés, les contraintes de cisaillement et normales sont liées par l'équation (2.3).

Dans la figure 2.5 (b) pour le chargement drainé, l'eau reste stationnaire le travail est effectué par les contraintes effectives et donc

$$\delta W = \tau' L \delta l - \sigma'_n L \delta n \quad (2.10)$$

Notons que pour la dilatation le travail effectué par la contrainte normale est négatif puisque σ'_n et τ_n sont dans des directions opposées. De l'équation (2.10), avec le volume du plan de glissement $V = Ly$,

$$\delta W = V(\tau' \delta \gamma + \sigma'_n \delta \varepsilon_n) = V \tau' \delta \gamma (1 - \tan \Psi_c / \tan \theta'_c) \quad (2.11)$$

Cependant, pour un matériau parfaitement plastique $\Psi_c = \theta'_c$ et ainsi le travail dissipé par les contraintes internes pour le chargement drainé est

$$\delta W = 0 \quad (2.12)$$

C'est un résultat très surprenant et présente des difficultés qu'on va pas explorer ici. L'implication est qu'un matériau frottant et parfaitement plastique est à la fois dissipative et conservative, ce

qui est absurde. La conclusion doit être que la règle d'écoulement pour un matériau frottant ne peut être associée. Néanmoins le résultat donné par l'équation (2.12) est très commode et il peut être utilisé pour calculer des limites supérieures pour les matériaux frottant comme le sable. Dans la figure 2.5 (a) pour le chargement non drainé, l'accroissement du travail effectué par les contraintes totales τ et σ est

$$\delta W = \tau L \delta w = s_u L \delta w \quad (2.13)$$

Il est à noter que pour une déformation de volume non drainée ou constante, aucun travail n'est effectué par la contrainte normale σ_n car il n'y a pas de déplacement normal à la surface de glissement. Pour un calcul de limite supérieure, on devra évaluer l'équation (2.13) pour tous les plans de glissement dans le mécanisme compatible.

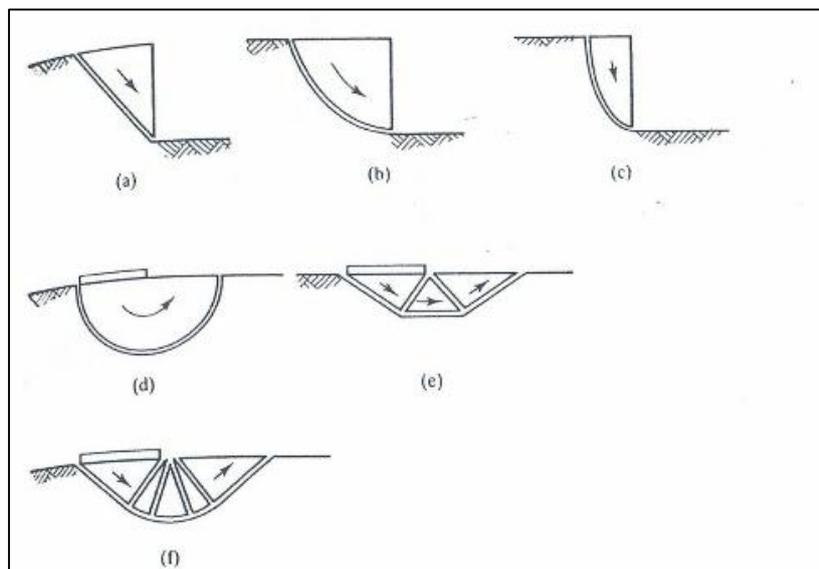


Figure 2.3 mécanisme de rupture compatible

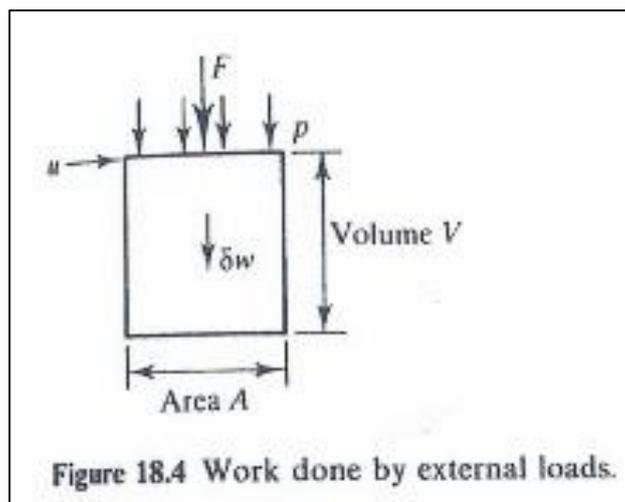


Figure 18.4 Work done by external loads.

Figure 2.4 travail des forces externe

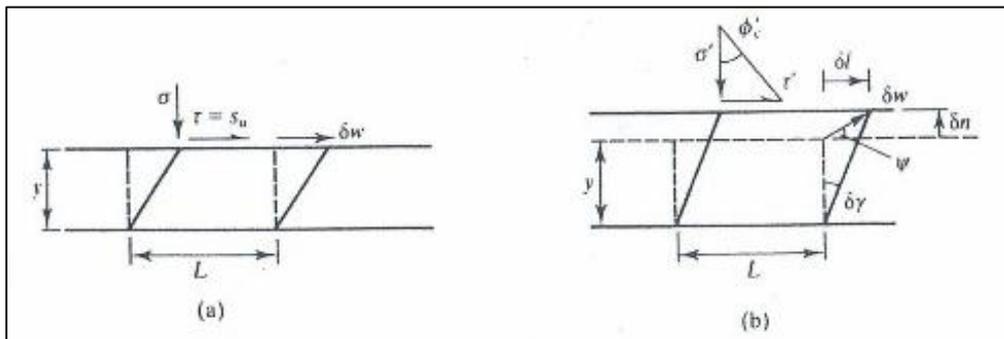


Figure 2.5 travail des contraintes interne suivant les plans de ruptures

2.5 Limites supérieures simples pour une fondation

Pour illustrer l'utilisation des théorèmes des limites, on trouvera des solutions pour la capacité portante d'une fondation soumise à un chargement non drainé. La figure 2.6 montre une fondation avec une longueur unitaire suivant l'axe transversal de sorte que la largeur B soit égale à la surface A. lorsque la charge F appliquée sur la fondation et la pression d'appui q sont augmentées, le tassement ρ augmentera jusqu'à ce que la fondation puisse être considérée comme ayant dans un état de rupture. À la charge d'effondrement F_c ou à la capacité portante q_c . On suppose que La fondation est lisse de sorte qu'il n'y a pas de contraintes de cisaillement entre le sol et la fondation. On obtiendra des solutions en utilisant d'abord un mécanisme simple puis on utilisera des discontinuités de contraintes et plus tard on obtiendra des solutions plus complexes en utilisant un glissement en éventail. Le but ici est d'illustrer les principes des solutions des limites.

La figure 2.7 (a) montre un mécanisme simple composé de trois coins triangulaires et la figure 2.7 (b) est le diagramme de déplacement correspondant. Les incréments de travail effectués par les forces de poids propre se réduisent à zéro puisque le bloc B se déplace horizontalement alors que les composantes verticales des déplacements des blocs A et C sont égales et opposées. Par conséquent, de l'équation (2.8), nous avons

$$\delta E = F_u \delta w_f \quad (2.14)$$

Pour calculer le travail effectué par les contraintes internes sur les plans de glissement, à partir de l'équation (2.13), il est plus facile de tabuler c_u , L et δw pour chaque plan de glissement. Par conséquent, d'après le tableau 2.1,

$$\delta W = 6s_u B \delta w_f \quad (2.15)$$

Et, en égalant δE et δW , une borne supérieure pour la charge d'effondrement est

$$F_u = 6Bs_u \quad (2.16)$$

Tableau 2.1 calcul du travail effectué par les contraintes internes sur les plans de glissement

Plan de rupture	Contrainte de cisaillement	longueur	déplacement	$\delta w = c_u L \delta w$
oa	c_u	$\frac{1}{\sqrt{2}}B$	$\sqrt{2} \delta w_f$	$c_u B \delta w_f$
ob	c_u	B	$2 \delta w_f$	$2c_u B \delta w$
oc	c_u	$\frac{1}{\sqrt{2}}B$	$\sqrt{2} \delta w_f$	$c_u B \delta w_f$
ab	c_u	$\frac{1}{\sqrt{2}}B$	$\sqrt{2} \delta w_f$	$c_u B \delta w_f$
bc	c_u	$\frac{1}{\sqrt{2}}B$	$\sqrt{2} \delta w_f$	$c_u B \delta w_f$
fa		B	δw_f	0
			Total	$6 c_u B \delta w_f$

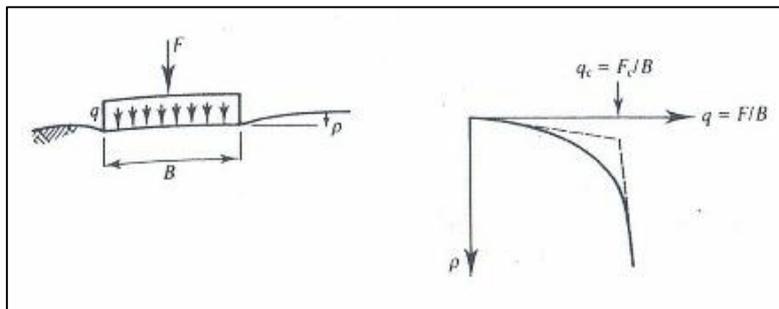


Figure 2.6 capacité portante d'une fondation superficielle

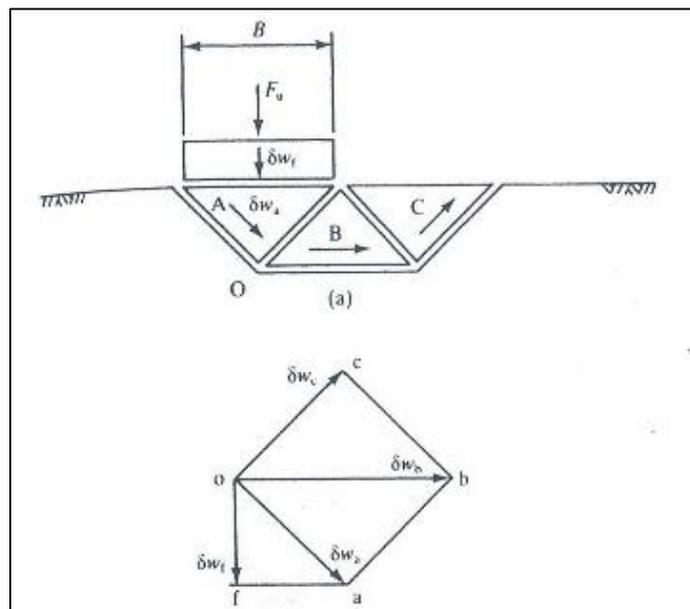


Figure 2.7 mécanisme de rupture d'une fondation

2.6 États des contraintes d'équilibre discontinus

Pour calculer une limite inférieure, il est nécessaire d'analyser un état d'équilibre de contrainte et de montrer qu'il ne dépasse pas l'un des critères de rupture donnés par les équations (2.1) et (2.2). Les états d'équilibre de contrainte peuvent être très proches d'un endroit à l'autre ou il peut y avoir des changements brusques de contrainte à travers les discontinuités de contrainte, à condition, bien sûr, que les conditions d'équilibre soient satisfaites à travers les discontinuités.

La variation de la contrainte totale verticale avec la profondeur dans le sol a été donnée durant le cours de MDS en licence. De la fig.2.8 la contrainte verticale sur un élément à une profondeur z est

$$\sigma_v = \gamma z + q + \gamma_w z_w \quad (2.17)$$

Où q est une contrainte de surface uniforme et z_w est la profondeur de l'eau au-dessus du niveau du sol.

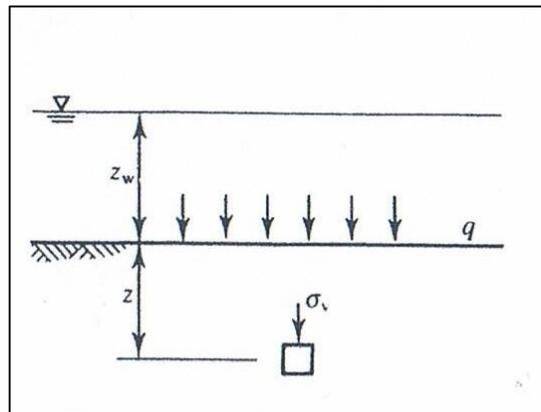


Figure 2.8 contrainte verticale en profondeur

Pour les charges drainées, la contrainte verticale effective est donnée par

$$\sigma'_v = \sigma_v - u \quad (2.18)$$

Où u est la pression (en régime permanent).

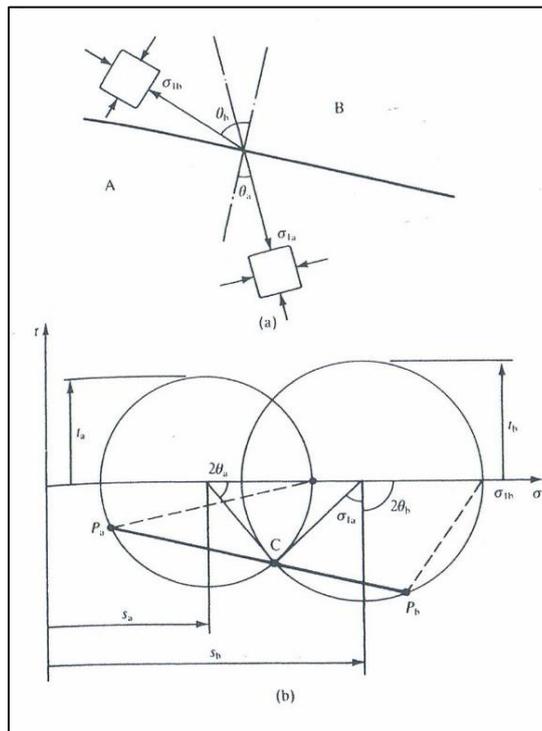


Figure 2.9 changement de contrainte à travers une discontinuité

Dans la fig.2.9 (a), deux régions A et B sont séparées par une discontinuité représentée par une seule ligne en gras; Les contraintes dans chaque région sont uniformes et sont caractérisées par les amplitudes et les directions des contraintes principales majeures σ_{1a} et σ_{1b} telles que représentées. La rotation dans la direction de la contrainte principale majeure à travers la discontinuité est $\delta\theta = \theta_b - \theta_a$. Les cercles de Mohr de la contrainte totale sont indiqués dans la figure 2.9 (b). Le point c représente les contraintes normale et de cisaillement sur la discontinuité et les pôles des cercles sont trouvés en traçant P_a-C-P_b parallèle à la discontinuité de la figure 2.9 (a). Ainsi, la direction des plans principaux majeurs est donnée par les lignes discontinues de la figure 2.9 (b) et, à partir des propriétés de la construction du cercle de Mohr donnée dans le cours MDS en licence, on peut noter $2\theta_a$ et $2\theta_b$, les angles sous-tendus par σ_{1a} et σ_{1b} , et la contrainte normale sur la discontinuité.

Comme d'habitude, il est nécessaire de considérer le chargement non drainé et drainé séparément. La figure 2.10 montre l'analyse du chargement non drainé. Les deux cercles de Mohr de la contrainte totale touchent la ligne de rupture donnée par l'équation. (2.1). D'après la géométrie de la figure 2.10 (b), notant que $AC = c_u$,

$$\delta s = 2 c_u \sin \delta\theta \quad (2.19)$$

Ainsi, le changement de la contrainte totale à travers une discontinuité est simplement lié à la rotation $\delta\theta$ de la direction de la contrainte principale majeure.

La figure 2.11 montre l'analyse de la charge drainée. Les deux cercles Mohr de contrainte effective touchent la ligne de rupture donnée par l'équation. (2.2) et l'angle ρ' définit le rapport τ'_n / σ'_n sur la discontinuité. Il est commode de définir un angle P tel qu'illustré dans la figure 2.12, où

$$P = 90 - \delta\theta \quad (2.20)$$

D'après la géométrie de la figure 2.12, notant que $A'C' = t'_a$,

$$\sin P = A'D' / t'_a \quad \sin \rho' = A'D' / s'_a \quad (2.21)$$

Par conséquent, en utilisant l'équation (2.20),

$$\sin \rho' = \sin P \sin \phi'_c = \cos \delta\theta \sin \phi'_c \quad (2.22)$$

À l'aide des constructions de la figure 2.12 et notant que $O'E' = O'F'$

$$\sin(P + \rho') = O'E' / s'_a \quad \sin(P - \rho') = O'F' / s'_b \quad (2.23)$$

Et donc, en faisant usage de l'équation (2.20)

$$s'_b / s'_a = \cos(\delta\theta - \rho') / \cos(\delta\theta + \rho') \quad (2.24)$$

Où ρ' est donné par l'équation (2,22)

A partir des équations (2.24) et (2.22), la variation de la contrainte effective à travers une discontinuité est simplement liée à la rotation $\delta\theta$ de la direction de la contrainte principale majeure.

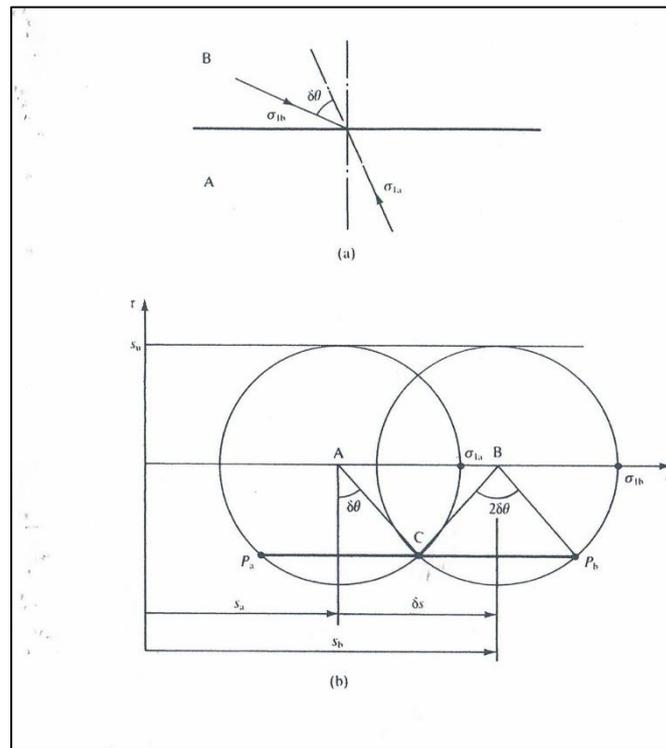


Figure 2.10 changement de contrainte à travers une discontinuité pour un chargement non drainé

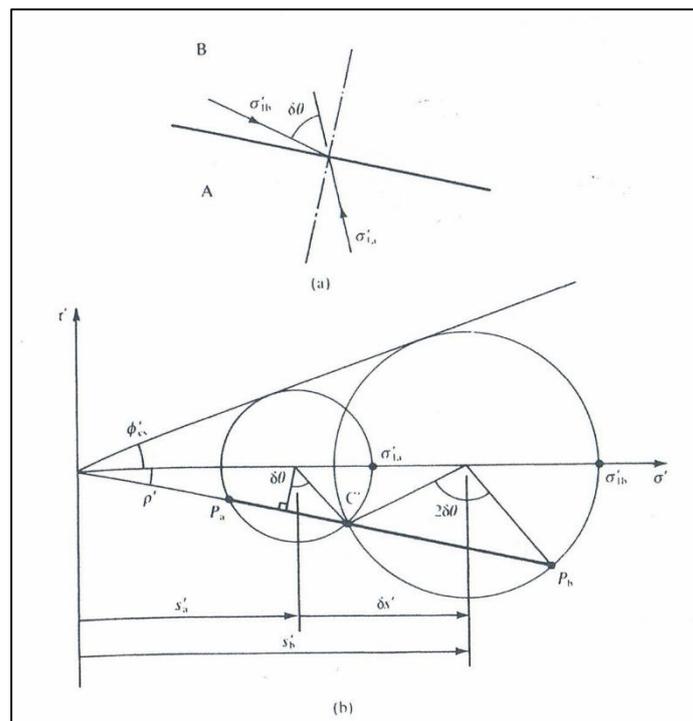


Figure 2.11 changement de contrainte à travers une discontinuité pour un chargement drainé

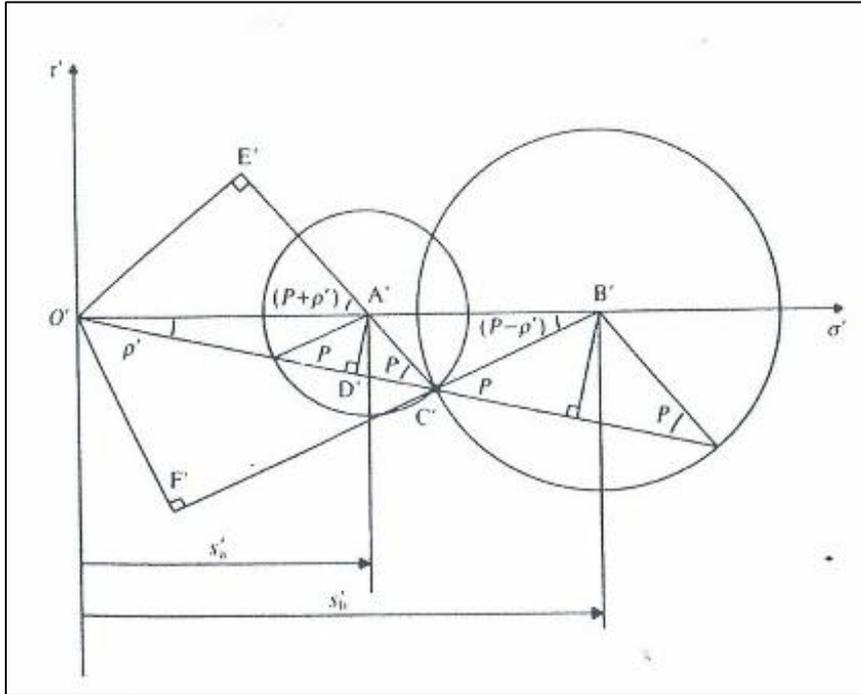


Figure 2.12 équilibre de contrainte à travers une discontinuité pour un chargement non drainé

2.7 Limites inférieures simples pour une fondation

On peut maintenant obtenir une solution simple de la limite inférieure pour la fondation montrée dans la figure 2.5. La Fig.2.13 (a) montre un état de contrainte avec deux discontinuités de contraintes verticales où l'état de contrainte est symétrique autour de la ligne médiane. Les contraintes de cisaillement sur les plans horizontaux et verticaux sont nulles et donc, à partir de l'équation (2.17), les contraintes verticales des éléments A et C dans les régions I et III sont

$$\sigma_z = \gamma z \quad (2.25)$$

Et les contraintes verticales dans les éléments B et D dans les régions II et IV sont

$$\sigma_z = q_1 + \gamma z \quad (2.26)$$

Figure. 2.13 (b) montre les cercles de Mohr de contrainte totale pour les éléments A et B et la figure 2.13 (c) montre les cercles des éléments C et D; Les points a et b représentent les contraintes sur les discontinuités marquées α et β dans la figure 2.7 (a). De la géométrie des fig. 2.13 (b) et (c),

$$q_1 + \gamma z = 4c_u + \gamma z \quad (2.27)$$

Donc, une diminution de la charge d'effondrement est

$$F_1 = 4c_u B \quad (2.28)$$

Alternativement, nous pourrions considérer les rotations des directions des contraintes principales majeures à travers les discontinuités, en utilisant l'équation (2.19). Pour chaque discontinuité $\delta\theta = 90^\circ$ et $\delta s = 2c_u$; ainsi, à partir de la géométrie de la figure 2.13 (b) et (c), on obtient les équations. (2.27) et (2.28).

La moyenne des solutions des limites supérieure et inférieure donne $F_c = 5c_u$ et les limites diffèrent d'environ $\pm 20\%$ par rapport à cette moyenne. Compte tenu des problèmes que pose la détermination de valeurs réelles de c_u pour les sols naturels, qui peuvent ne pas être ni isotropes ni homogènes, ces limites simples peuvent convenir à des conceptions de routine simples. Cependant, afin d'illustrer l'utilisation de glissement en éventail et l'éventail de contraintes nous examinerons quelques solutions alternatives.

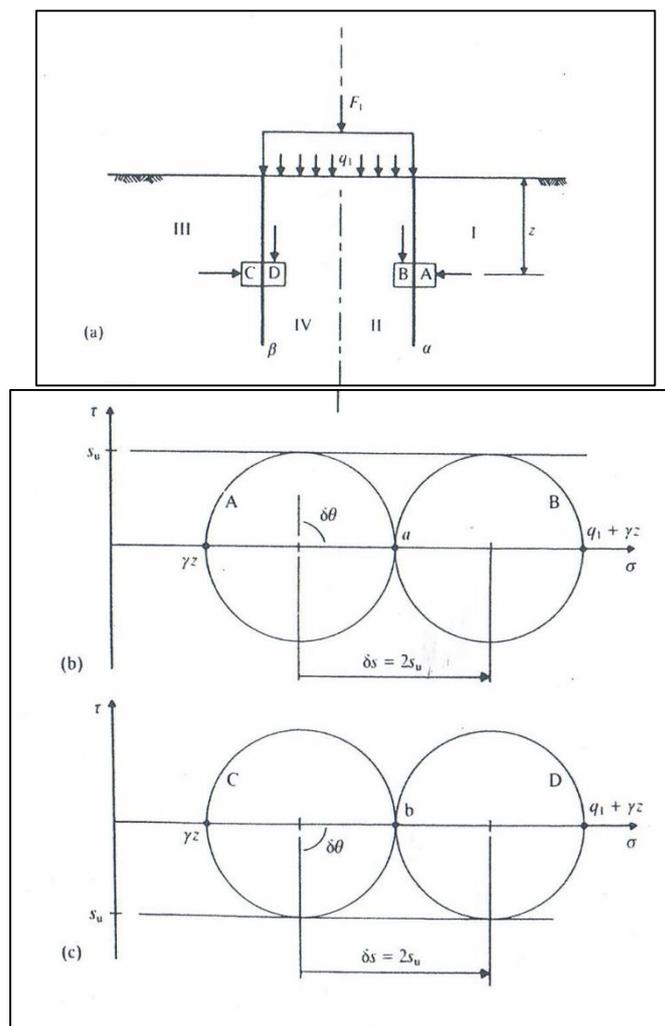


Figure 2.13 équilibre de contrainte d'une fondation pour un chargement drainé

2.8 Solutions de limite supérieure et inférieure en utilisant des glissements en éventail

Dans la figure 2.3 (f), il y a une combinaison de surfaces de glissement droites et courbes et pour avoir un mécanisme compatible, il est nécessaire d'avoir un éventail de surfaces de glissement comme illustré. La figure 2.14 montre les mécanismes et les diagrammes de déplacement pour les glissements en éventail: fig.2.14 (a) pour le chargement non drainé et fig. 2.14 (b) pour charge drainé. On doit faire le chemin à travers ceux-là avec la description de la construction des diagrammes de déplacement donnée à la section 2.3. De la géométrie de la fig. 2.14 (a).

$$r_b = r_a \quad \text{and} \quad \delta w_b = \delta w_a \quad (2.29)$$

Ainsi, le rayon de l'éventail et l'incrément de déplacement restent constants grâce à un glissement en éventail pour le chargement non drainé. De la géométrie de la figure 2.14 (b),

$$r_b = r_a e^{\theta_f \tan \psi} \quad (2.30)$$

$$\delta w_b = \delta w_a e^{\theta_f \tan \psi} \quad (2.31)$$

Où θ_f est l'angle de l'éventail; Ainsi les arcs extérieurs de l'éventail de glissement et le diagramme de déplacement sont tous deux des spirales logarithmiques.

Pour un éventail de glissement comme celui de la figure 2.14 (a), il est nécessaire d'évaluer le travail effectué sur la surface de glissement circulaire et sur toutes les surfaces de glissement radiales. A partir de la figure 2.15, sommant pour les éléments de l'arc de cercle et pour les surfaces de glissement radiales, l'accroissement du travail effectué par les contraintes internes à travers l'éventail est

$$\delta W = \sum c_u R (\delta w \delta \theta) + \sum c_u (R \delta \theta) \delta w \quad (2.32)$$

Par conséquent, à la limite,

$$\delta W = 2c_u R \delta w \int_0^{\theta_f} d\theta \quad (2.33)$$

et

$$\delta W = 2c_u R \delta w \theta_f = 2c_u R \delta w \Delta \theta \quad (2.34)$$

Où θ_f est l'angle de l'éventail qui est égal au changement $\Delta \theta$ dans la direction du vecteur de déplacement δW à travers l'éventail de glissement.

On peut aussi considérer le changement de contrainte d'une région à une autre à travers un éventail de discontinuités de contrainte, comme le montre la figure 2.16. L'angle θ_f est égal à la rotation $\Delta \theta$ de la direction de la contrainte principale majeure à travers l'éventail. La figure 2.17 (a) montre un éventail de contrainte pour la charge non drainée et la figure 2.17 (b) montre les

cercles de Mohr de la contrainte totale pour les discontinuités les plus externes; Dans l'éventail il y a beaucoup de discontinuités radiales et il y a également beaucoup de cercles de Mohr entre ceux montrés. Il est à noter que les limites extrêmes de l'éventail sont définies par $\theta_a = \theta_b = 45^\circ$. De l'équation (2.19), comme $\delta\theta$ tend vers zéro,

$$\frac{ds}{d\theta} = 2c_u \quad (2.35)$$

Et en intégrant à travers l'éventail de la région A à B,

$$\Delta s = 2c_u \Delta\theta = 2c_u \theta_f \quad (2.36)$$

La figure 2.18 montre un éventail de contrainte et les cercles de Mohr correspondants pour le chargement drainé. Comme précédemment, il y aura un grand nombre de discontinuités radiales supplémentaires et des cercles de Mohr entre les plus externes. Noter que les limites de la zone de l'éventail sont définies par $\theta_a = \theta_b = 45^\circ + 1/2 \theta'_c$. De l'équation (2.24), le changement de contrainte à travers une discontinuité peut être écrit comme

$$\frac{ds'}{s'} = \frac{2 \sin \delta\theta \sin \rho'}{\cos(\delta\theta + \rho')} \quad (2.37)$$

Comme $\delta\theta \rightarrow 0$, de l'éq. (2.22) nous avons $\rho' = \theta'_c$ et de eq. (2.37),

$$\frac{ds'}{s'} = 2s' \tan \theta'_c \quad (2.38)$$

Ainsi, en intégrant à travers le ventilateur de la région A à la région B,

$$s'_b/s'_a = e^{2 \tan \theta'_c \Delta\theta} = e^{2 \tan \theta'_c \theta_f} \quad (2.39)$$

Eq. (2.36) et (2.39) donnent les variations de l'éventail de contrainte à travers les éventails de contrainte en fonction de la résistance du sol c_u ou θ_f et l'angle de l'éventail θ_f ou la rotation $\Delta\theta$ de la direction de la contrainte principale majeure.

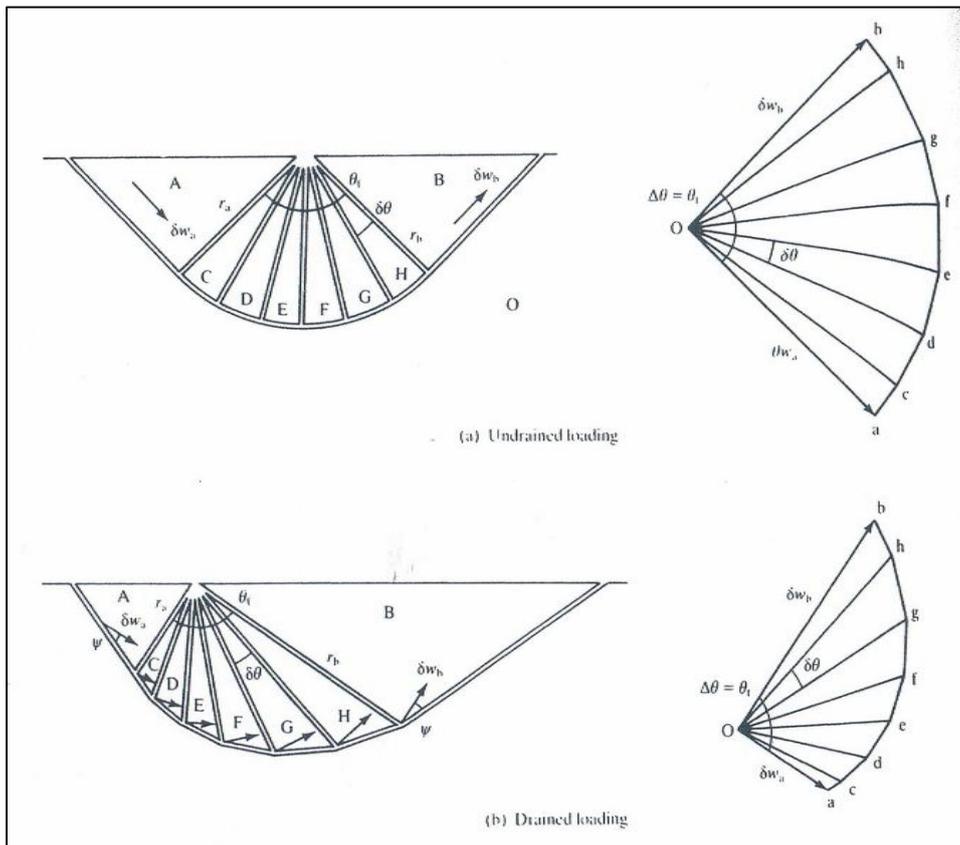


Figure 2.14 mécanisme de rupture en éventail pour un chargement non drainé et drainé

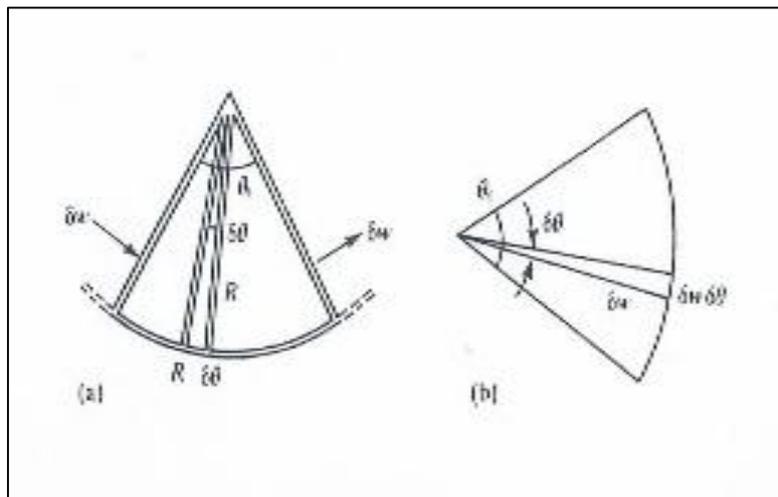


Figure 2.15 travail suivant les plans de cisaillement en éventail

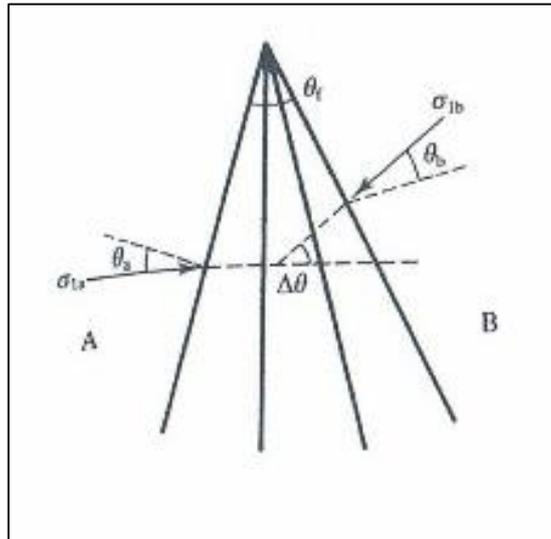


Figure 2.16 rotation de la direction de la contrainte principale majeure à travers l'éventail de contrainte

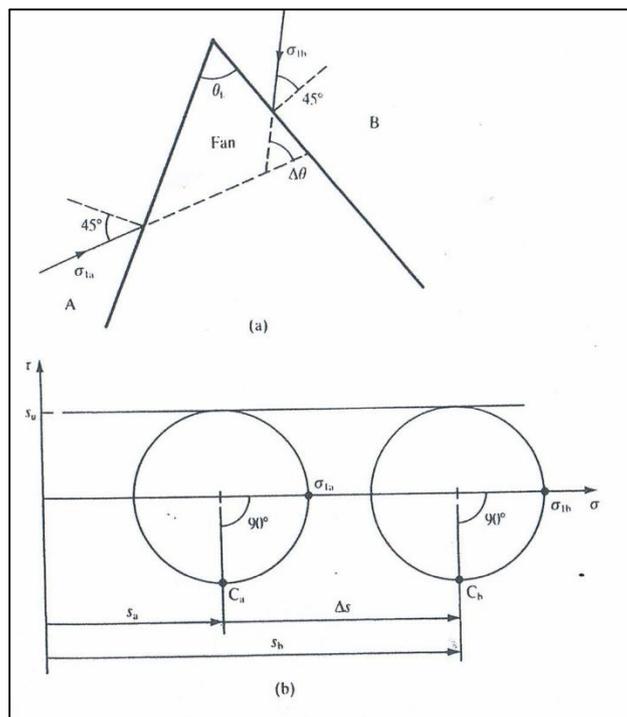


Figure 2.17 changement de contrainte à travers l'éventail de contrainte pour un chargement non drainé

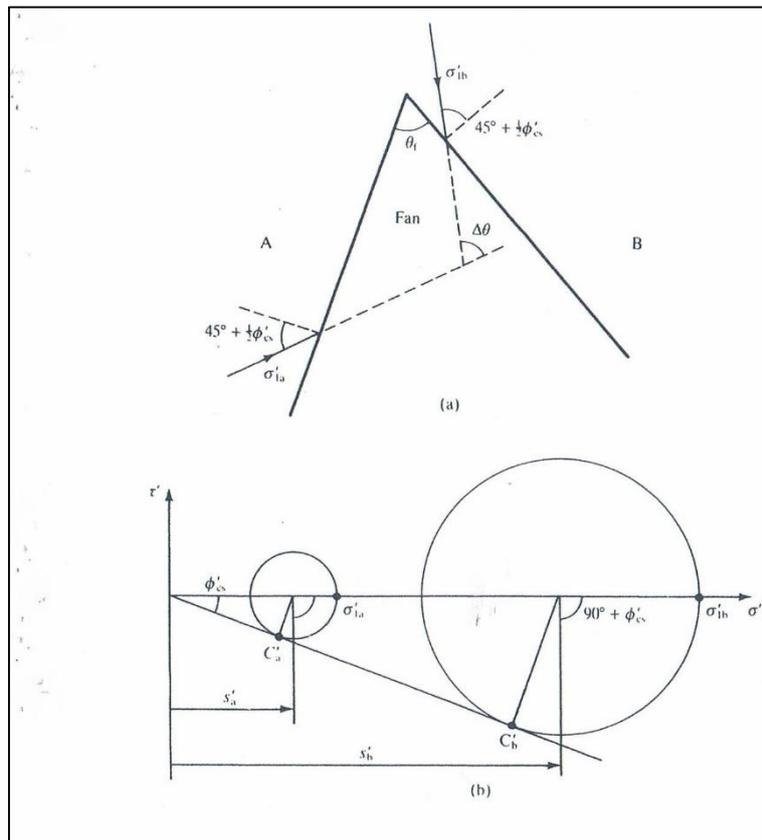


Figure 2.18 changement de contrainte à travers l'éventail de contrainte pour un chargement drainé

2.9 Solutions limites pour la capacité portante d'une fondation en utilisant des glissements en éventail

Les solutions simples de limite supérieure et limite inférieure obtenues précédemment peuvent maintenant être modifiées en ajoutant des éventails de glissement ou un éventail de contrainte.

2.9.1 Limite supérieure avec éventails de glissement

La Fig.2.19 (a) montre un mécanisme composé de deux coins triangulaires et d'un éventail de glissement et la figure 2.19 (b) est le diagramme de déplacement correspondant. Comme auparavant le travail effectué par les forces de poids propre sommé à zéro et, eq. (2.8),

$$\delta E = F_u \delta w_f \quad (2.40)$$

Le rayon de l'éventail est $R = \frac{B}{\sqrt{2}}$, l'angle de l'éventail est $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ et $\delta w_a = \sqrt{2} \delta w_f$. Par conséquent, de l'équation (2.34) le travail effectué par les contraintes internes dans l'éventail de glissement est

$$\delta W = 2c_u R \delta w \theta_f = \pi c_u B \delta w_f \quad (2.41)$$

Et, à partir du tableau 2.2, pour l'ensemble du mécanisme

$$\delta W = (2 + \pi) c_u B \delta w_f \tag{2.42}$$

Egalant δE et δW , la limite supérieure de la charge d'effondrement est

$$F_u = (2 + \pi) c_u B \tag{2.43}$$

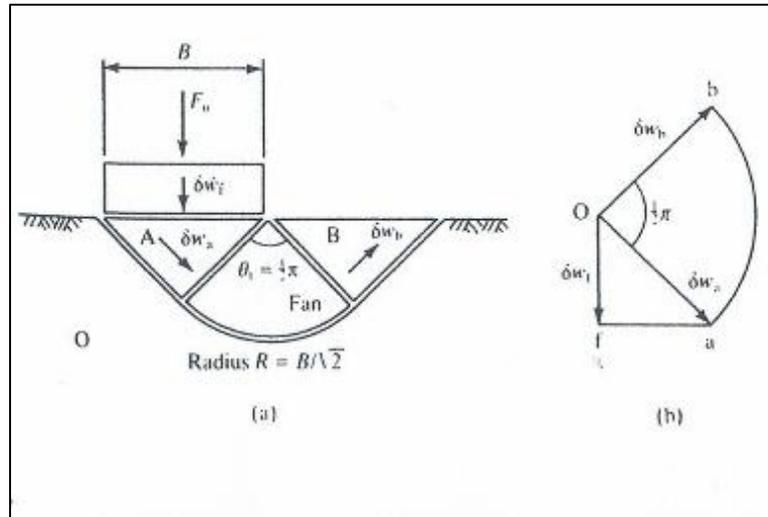


Figure 2.19 mécanisme de rupture pour une fondation

Tableau 2.2 : Travail effectué par les contraintes internes dans l'éventail de glissement

Plan de rupture	Contrainte de cisaillement	longueur	déplacement	$\delta w = c_u L \delta w$
oa	c_u	$\frac{1}{\sqrt{2}} B$	$\sqrt{2} \delta w_f$	$c_u B \delta w_f$
ob	c_u	$\frac{1}{\sqrt{2}} B$	$\sqrt{2} \delta w_f$	$c_u B \delta w$
L'éventail	c_u			$\pi c_u B \delta w_f$
fa		B	δw_f	0
			Total	$(\pi + 2) c_u B \delta w_f$

2.9.2 Limite inférieure avec les éventails de contrainte

La figure 2.20 (a) montre un état de contrainte avec deux éventails de contraintes dans les régions II et IV. Comme précédemment, l'état de contrainte est symétrique autour de la ligne médiane et les équations. (2.25) et (2.26) s'appliquent respectivement aux régions I et III. La figure 2.20(b) montre les cercles de Mohr de contrainte totale pour les éléments en A et C et les points a et c représentent les contraintes sur les discontinuités les plus extrêmes dans l'éventail dans la région

II. De la géométrie de la fig. 2.20, l'angle de l'éventail est $\theta_f = 90^\circ = 1/2 \pi$ et de l'éq. (2.36) le changement de contrainte à travers l'éventail est

$$\Delta s = 2c_u \Delta \theta_f = \pi C_u \quad (2.44)$$

De la géométrie de la fig. 2.20 (b),

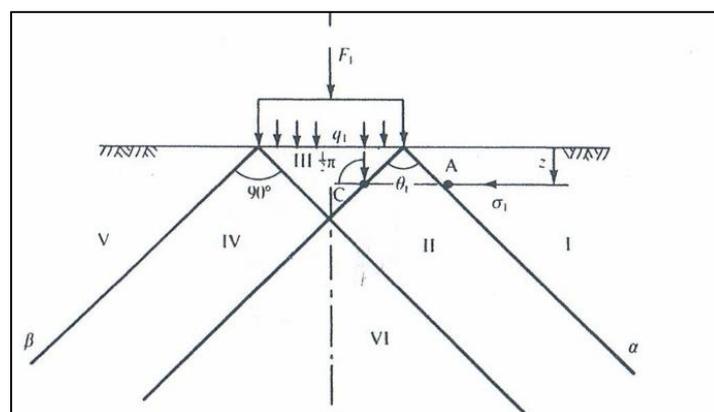
$$q_1 + Yz = (2 + \pi) C_u + Yz \quad (2.45)$$

Et par conséquent une limite inférieure pour la charge de rupture est

$$F_1 = (2 + \pi) C_u B \quad (2.46)$$

On doit étudier strictement l'état de contrainte dans la région VI où les éventails se chevauchent, mais l'analyse est longue et dépasse le cadre du présent cours. Il est intuitivement assez clair que les contraintes dans la région VI seront moins critiques que celles près des bords de la fondation et que les conditions dans les éventails de contraintes qui se chevauchent auront tendance à s'annuler mutuellement.

On doit noter que les limites supérieure et inférieure données par les équations (2.43) et (2.46) sont égales et doivent donc être une solution exacte. Nous avons eu la chance d'obtenir une solution exacte avec de telles solutions simples supérieures et inférieures: normalement on ne pourra obtenir que des limites inégales.



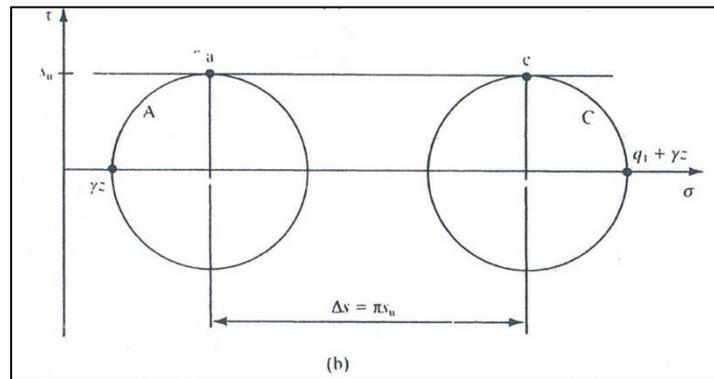


Figure 2.20 équilibre des contraintes pour une fondation

2.10 Conclusions.

L'objectif à travers une revue des techniques standards largement connues et utilisées dans la résolution et les solutions des problèmes de la stabilité du sol est d'atteindre deux buts.

Le premier objectif est de discuter le sens et la nature des solutions de mécanique des sols classiques existantes du point de vue de l'analyse limite. Beaucoup de techniques contiennent implicitement la philosophie de base de l'un ou des deux théorèmes de l'analyse limite.

Le deuxième objectif est de démontrer l'utilité et la puissance des théorèmes de l'analyse dans le développement d'une technique d'analyse de rupture. Des informations utiles, bien que parfois grossières, sont rapidement obtenues.

En générale, On comparant les résultats numériques de l'analyse par La méthode de l'équilibre limite classique et la méthode d'analyse limiter, ce bon accord est généralement obtenu. Néanmoins la technique de la méthode de l'analyse limite fourni de nouvelles solutions, ou une méthode alternative qui est plus rationnelle que les techniques existantes.