Chapitre 3 : Résoudre équation différentielle d'ordre N linéaire à coefficients constants : Par la Méthode de variation des constantes et Méthode recherche solution particulière

$A_N.\dfrac{d^N y}{dx^N}+A_{N-1}.\dfrac{d^{N-1}y}{dx^{N-1}}+.......+A_2.\dfrac{d^2y}{dx^2}+A_1.\dfrac{dy}{dx}+A_0.y=f(\mathrm{x})$; ($A_N, A_{N-1},....,A_1,A_0$ Sont des constantes)

3.1: Recherche la solution Homogène $y_H=?\rightarrow$ (Résoudre l'Equation Sans Second Membre E.S.S.M

$A_N.\dfrac{d^N y}{dx^N}+A_{N-1}.\dfrac{d^{N-1}y}{dx^{N-1}}+.......+A_2.\dfrac{d^2y}{dx^2}+A_1.\dfrac{dy}{dx}+A_0.y=0$).

On accepte sans démonstration les points suivants :

- La solution **de E.S.S.M** est sous forme exponentielle $y=\mathrm{e}^{(R.x)}$
- Equation **N$^{\text{ième}}$** ordre admet **N** solutions différentes $y_1, y_2, y_3........................, y_N$
- Dans le cas ou $\dfrac{y_K}{y_J}=C^{st}$ on prend $y_K=x.y_J$
- La solution Homogène y_H est une combinaison linéaire entre les N solutions $y_1, y_2,...., y_N$:

$$\boxed{y_H=C_1.y_1+C_2.y_2+.......+C_N.y_N}$$

Pour Calculer les solutions $y_1, y_2,...., y_N$ on doit remplacer $y=\mathrm{e}^{(R.x)}$ dans **E.S.S.M** Tel que :

$$\begin{cases} y=\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \dfrac{dy}{dx}=R.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=R^2.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \\ \dfrac{d^Ny}{dx^N}=R^N.\mathrm{e}^{(R.x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0*y=A_0*\mathrm{e}^{(R.x)} \\ A_1*\dfrac{dy}{dx}=A_1*R.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ A_2*\dfrac{d^2y}{dx^2}=A_2*R^2.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \\ A_N*\dfrac{d^Ny}{dx^N}=A_N*R^N.\mathrm{e}^{(R.x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textbf{E.S.S.M}\rightarrow \\ \mathrm{e}^{(R.x)}*\left[A_N.R^N+A_{N-1}.R^{N-1}+....+A_1.R+A_0\right]=0 \\ \mathrm{e}^{(R.x)}\neq 0 \end{cases}$$

Equation caractéristique

$$A_N.R^N+A_{N-1}.R^{N-1}+....+A_2.R^2+A_1.R+A_0=0$$

Les solutions possibles de l'équation caractéristique soit réelle (R) ou complexe ($\alpha+\beta.I$), alors les solutions E.S.S.M sont : $y=\mathrm{e}^{R.x}$ $y=\mathrm{e}^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)$, $y=\mathrm{e}^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)$ Ou bien des solutions répétées $y=x^m.\mathrm{e}^{R.x}$, $y=x^m.\mathrm{e}^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)$, $y=x^m.\mathrm{e}^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)$ Tel que **m** Nombre de répétition.

3.2 : Recherche la solution Totale $y_T=?\rightarrow$ (Résoudre l'Equation Avec Second Membre E.A.S.M)

Pour calculer la solution Totale En utilisant deux méthodes :

1$^{\text{ère}}$: Méthode de variation des constantes : Dans cette méthode la forme de y_T est la même forme y_H c'est-à-dire : $y_T=C_1(\mathrm{x}).y_1+C_2(\mathrm{x}).y_2+....+C_N(\mathrm{x}).y_N$, sauf que les constantes sont des variables en fonction de x dont les dérivées sont déterminées par le système suivant :

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & . & . & y_N \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} & . & . & y_N^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} & . & . & y_N^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ y_1^{(N-1)} & y_2^{(N-1)} & y_3^{(N-1)} & . & . & y_N^{(N-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \\ \\ C_N' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ \dfrac{F(x)}{A_N} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{La Solution du Systeme}} \begin{cases} \dfrac{dC_1(\mathrm{x})}{dx}=\psi_1(x) \\ \dfrac{dC_2(\mathrm{x})}{dx}=\psi_2(x) \\ .... \\ \dfrac{dC_N(\mathrm{x})}{dx}=\psi_N(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} \int dC_1(\mathrm{x})=C_1(\mathrm{x})=\int \psi_1(x).dx+K_1 \\ \int dC_2(\mathrm{x})=C_2(\mathrm{x})=\int \psi_2(x).dx+K_2 \\ . \\ \int dC_N(\mathrm{x})=C_N(\mathrm{x})=\int \psi_N(x).dx+K_N \end{cases}}$$

2ème: Méthode recherche solution particulière y_P : Dans cette méthode on pose la forme de **la Solution Totale = Solution Homogène + Solution particulière** $\Rightarrow y_T = y_H + y_P$

La forme de y_P est obtenue à partir de la fonction f(x), on trouve 2 cas principaux :

- 1 er cas : $\boxed{F(x) = P_{N1}(x).e^{S.x} = (P_0 + P_1.x + P_2.x^2 + ... + P_{N1}.x^{N1}).e^{S.x}}$; $P_{N1}(x)$: polynôme d'ordre N1.

  $\boxed{y_P = a_{N1}(x).e^{S.x}.x^m = (a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{N1}.x^{N1}).e^{S.x}.x^m}$

  Tel que $a_0, a_1, a_2 ..... a_{N1}$ Sont des constantes calculées par l'identification avec la fonction f(x).

- 2 ème cas : $\boxed{F(x) = e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x) + Q_{N2}(x).Sin(\gamma.x))}$

  $P_{N1}(x)$: Polynôme d'ordre N1 et $Q_{N2}(x)$: polynôme d'ordre N2

  $$\boxed{y_P = e^{S.x}.(a_{N3}(x).\cos(\gamma.x) + b_{N3}(x).Sin(\gamma.x)).x^m}$$

  N3: le degré du polynôme $a_{N3}(x)$ et $b_{N3}(x)$ Tel que N3=**MAX**(N1,N2)

  et le terme x^m est introduit pour **éviter** la répétition des solutions y_1, y_2 , ..., y_N de E.S.S.M dans la solution $y_P = e^{S.x}$ ou $y_P = e^{S.x}.\cos(\gamma.x)$ ou $y_P = e^{S.x}.\sin(\gamma.x)$

  m désigne combien des solutions de E.S.S.M répétées avec *la solution particulière* y_P.

Remarque : dans le cas $\boxed{F(x) = \sum_I^N F_I(x)}$ La solution particulière $\boxed{y_P(x) = \sum_I^N \left(y_P(x)\right)_I}$

Tel que : $yp_1 \to F_1$ et $yp_2 \to F_2$; .... $yp_N \to F_N$

- Méthode Recherche Solution Particulière est valable seulement pour f(x) de forme suivante :

polynôme x^N	***exponentielle ordre 1:*** $e^{S.x}$	***Cosinus ordre 1 :*** $\cos(\gamma.x)$	***Sinus ordre 1 :*** $\sin(\gamma.x)$

- La Méthode de variation des constantes est valable pour toutes les fonctions f(x).

TD 03 : Equations différentielles d'ordre N

Exercice 1

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3} + 3.\frac{d^2y}{dx^2} + 3.\frac{dy}{dx} + y = e\,xp(-x)}$$

- **E.S.S.M** (Recherche la solution homogène) :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3.\frac{d^2y}{dx^2} + 3.\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Équation caractéristique $\boxed{R^3 + 3.R^2 + 3.R + 1 = 0}$ Par test on remarque que $R_1 = -1$ on fait la division e**uclidienne** on trouve :

$$\boxed{\frac{R^3 + 3.R^2 + 3.R + 1}{R+1} = R^2 + 2.R + 1}$$

$$\boxed{\begin{gathered} R^2 + 2.R + 1 = 0 \\ \Delta = b^2 - 4.a.c = 2^2 - 4.1.1 = 0 \\ R_2 = R_3 = \frac{-b}{2.a} = -1 \end{gathered}}$$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = x.e^{-x} \\ y_3 = x^2.e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_H(x) = C_1.y_1 + C_2.y_2 + C_3.y_3 \\ y_H(x) = (C_1 + C_2.x + C_3.x^2).e^{-x} \end{cases}$$

1ère Méthode recherche solution particulière

$y_P = ? \to f(x) = 1.e^{-x} = P_N(x).e^{S.x}$ Tel que $P_n(x)$ c'est un polynôme d'ordre 0 $\Rightarrow y_P = a_0.e^{-x}.x^m$

On a : $S = -1 = r_{1,2,3} \to$ Donc Trois solution sont égaux alors **m=3** $\Rightarrow y_P = a_0.e^{-x}.x^3$

Pour calculer a_0 on remplace y_p dans **E.A.S.M** Tel que :

$\boxed{\frac{dy_P}{dx} = a_0.e^{-x}.(-x^3 + 3..x^2)}$; $\boxed{\frac{d^2y_P}{dx^2} = a_0.e^{-x}.(x^3 - 6..x^2 + 6..x)}$; $\boxed{\frac{d^3y_P}{dx^3} = a_0.e^{-x}(-x^3 + 9..x^2 - 18..x + 6)}$

E.A.S.M : $\frac{d^3y_P}{dx^3}+3.\frac{d^2y_P}{dx^2}+3.\frac{dy_P}{dx}+y_P=e^{-x}$.

$\rightarrow 6.a_0.e^{-x}=1.e^{-x}\rightarrow a0=\frac{1}{6}$ Donc $\boxed{y_T=y_H+y_P=(C_1+C_2.x+C_3.x^2+\frac{1}{6}.x^3).e^{-x}}$

2^eme méthode variation des constantes

$y_T(x)=(C_1(x)+C_2(x).x+C_3(x).x^2).e^{-x}$

On a : $\begin{cases} y_1=e^{-x}\\ y_2=x.e^{-x}\\ y_3=x^2.e^{-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y_1'=-e^{-x}\\ y_2'=(1-x).e^{-x}\\ y_3'=(2.x-x^2).e^{-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y_1''=e^{-x}\\ y_2''=(-2+x).e^{-x}\\ y_3''=(2-4.x+x^2).e^{-x}\end{cases}$

On construit le système de dérivées des constantes

$$\begin{cases} y_1.C_1'+y_2.C_2'+y_3.C_3'=0\\ y_1'.C_1'+y_2'.C_2'+y_3'.C_3'=0\\ y_1''.C_1'+y_2''.C_2'+y_3''.C_3'=F(x)/\mathrm{a}_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} e^{-x}.\left(C_1'+x.C_2'+x^2.C_3'\right)=0\\ e^{-x}.\left(-C_1'+(1-x).C_2'+(2.x-x^2).C_3'\right)=0\\ e^{-x}\left(C_1'+(-2+x).C_2'+(2-4.x+x^2).C_3'\right)=e^{-x}\end{cases}$$

Tel que (a_3) est le coefficient de la troisième dérive.

$$\Rightarrow\begin{cases} C_1'+x.C_2'+x^2.C_3'=0\\ -C_1'+(1-x).C_2'+(2.x-x^2).C_3'=0\\ C_1'+(-2+x).C_2'+(2-4.x+x^2).C_3'=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dC_1}{dx}=\frac{1}{2}.x^2\\ \frac{dC_2}{dx}=-x\\ \frac{dC_3}{dx}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_1=\frac{1}{6}.x^3+K_1\\ C_2=-\frac{1}{2}x^2+K_2\\ C_3=\frac{1}{2}.x+K_3\end{cases}$$

$$y_T(x)=\left((\frac{1}{6}.x^3+K_1)\ +\ (-\frac{1}{2}x^2+K_2).x\ +\ (\frac{1}{2}.x+K_3).x^2)\right).e^{-x}$$

$$y_T(x)=\left(K_1+K_2.x+K_3.x^2\right).e^{-x}+\frac{1}{6}.x^3.e^{-x}=y_H+y_P$$

Exercice 2

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{dx}^4}+2.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{dx}^2}+y=f(x)=x^2.\mathrm{e}^x.\cos(2.x)\ +\ \sin\left(x\right)\ +\ x^3$$

- **E.S.S.M (Recherche la solution homogène) :**

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{dx}^4}+2.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{dx}^2}+y=0$$

Équation caractéristique : $\boxed{R^4+2.R^2+1=0}\ \Rightarrow(R^2+1)^2=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} R^2=-1=I^2\\ R^2=-1=I^2\end{cases}$

Donc on a des Solutions complexes doubles : $\begin{cases} R_{1,2}=0\pm I=\alpha\pm\beta.I\\ R_{3,4}=0\pm I=\alpha\pm\beta.I\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y_1=e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)=\cos(x)\\ y_2=e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)=\sin(x)\\ y_3=x.e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)=x.\cos(x)\\ y_4=x.e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)=x.\sin(x)\end{cases}$

$y_H(x)=C_1.y_1+C_2.y_2+C_3.y_3+C_4.y_4\qquad\rightarrow y_H(x)=(C_1+C_3.x).\cos(x)+(C_2+C_4.x).\sin(x)$

➢ **Recherche la solution particulière :**

$$y_P = ? \rightarrow f(x) = x^2.e^x.\cos(2.x) + \sin(x) + x^3$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

$$yp = yp_1 + yp_2 + yp_3$$

- $yp_1 = ? \rightarrow f_1(x) = x^2.e^x.\cos(2.x) = e^x.(x^2.\cos(2.x) + 0.Sin(2.x))$

  $f_1(x) = e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x) + Q_{N2}(x).\sin(\gamma.x))$

  Donc $yp_1 = e^{S.x}.(a_{N3}(x).\cos(\gamma.x) + b_{N3}(x).\sin(\gamma.x)).x^m$

  On a N1=2 et N2=0 => N3 = **MAX** (N1, N2) = 2 ;

  On a $S = 1$; $\gamma = 2$ $\rightarrow$ $S + \gamma.I = 1 + 2.I \neq R_{1,2,3,4}$ (Aucune solution répétée) $\rightarrow m = 0$

  $\boxed{\rightarrow \quad yp_1 = e^x.((a_0 + a_1.x + a_2.x^2).\cos(\gamma.x) + (b_0 + b_1.x + b_2.x^2).\sin(\gamma.x)).x^0}$

- $y_{P2} = ? \rightarrow f_2(x) = e^{0.x}.(0.\cos(1x) + 1.\sin(1x)) \rightarrow f(x) = e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x) + Q_{N2}(x).\sin(\gamma.x))$

  N1=0 et N2=0 => N3 = **MAX**(N1,N2) = 0 ; $S = 0$; $\gamma = 1$

  $y_{P2}(x) = e^{0.x}.(d_0.\cos(x) + E_0.\sin(x)).x^m$

$S + \gamma.I = 0 + I = r_1$ et r_3 (Deux solutions répétées) $\Rightarrow m = 2 \rightarrow$ $\boxed{y_{P2}(x) = d_0.x^2.\cos(x) + E_0.x^2.\sin(x))}$

- $y_{P3} = ? \rightarrow f_3(x) = x^3.e^{0.x} = P_N(x).e^{S.x}$; Tel que N=3 ; S=0

  Donc la SP ; $yp_3 = g_N(x).e^{S.x}.x^m = \left(g_0 + g_1.x + g_2.x^2 + g_3.x^3\right).e^{0.x}.x^m \rightarrow$

  On a $S = 0 \neq R_{1,2,3,4}$ (Aucune solution répétée) $\rightarrow m = 0$

  Donc $\boxed{yp_3 = g_0 + g_1.x + g_2.x^2 + g_3.x^3}$

Solution totale : $y_T = y_H + y_P$

Exercice 3

$\dfrac{d^4y}{dx^4} + 6.\dfrac{d^2y}{dx^2} + 25.y = 0$ On donne $\begin{cases} -3 - 4.I = (1 - 2.I)^2 \\ -3 + 4.I = (1 + 2.I)^2 \end{cases}$

$\dfrac{d^4y}{dx^4} + 6.\dfrac{d^2y}{dx^2} + 25.y = 0$ **Équation caractéristique** $R^4 + 6.R^2 + 25 = 0$; On pose $R^2 = Z \rightarrow R^4 = Z^2$

E.C : $Z^2 + 6.Z + 25 = 0$; on calcul $\Delta = b^2 - 4.a.c = 6^2 - 4.1.25 = -64 = I^2.64$

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{-6 - 8.I}{2} = -3 - 4.I = (1 - 2.I)^2 = R^2 \text{..........................(1)} \\ Z_2 = \dfrac{-6 + 8.I}{2} = -3 + 4.I = (1 + 2.I)^2 = R^2 \text{..........................(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 = -(1 - 2.I) = -1 + 2.I \\ R_2 = +(1 - 2.I) = +1 - 2.I \\ R_3 = -(1 + 2.I) = -1 - 2.I \\ R_4 = +(1 + 2.I) = +1 + 2.I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{1,\ 3} = -1 \pm 2.I \\ R_{2,\ 4} = +1 \pm 2.I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \exp(-x).\cos(2.x) \\ y_3 = \exp(-x).\sin(2.x) \\ y_2 = \exp(+x).\cos(2.x) \\ y_4 = \exp(+x).\sin(2.x) \end{cases}$$

La solution est Homogène est :

$$\Rightarrow y_H(x) = C_1.y_1 + C_2.y_2 + C_3.y_3 + C_4.y_4$$

$$\boxed{y_H(x) = e^{-x}.\left(C_1.\cos(2.x) + C_3.\sin(2.x)\right) + e^x.\left(C_2.\cos(2.x) + C_4.\sin(2.x)\right)}$$

Exercice4 :

- $$\frac{d^4y}{dx^4}+4.\frac{d^3y}{dx^3}+6.\frac{d^2y}{dx^2}+4.\frac{dy}{dx}+5.y=0$$

Remarque: on donne (R_1= -2+ I) comme une solution de l'équation caractéristique.

Solution :

- l'équation caractéristique.

$$\boxed{R^4+4.R^3+6.R^2+4.R+5=0}$$

On a (R_1= -2+ I) Donc même (R_2= -2- I) c'est une solution conjugue de E.C. Dans ce cas on a connu deux solutions comme suit : (R +2- I).(R +2+ I)=$R^2+4.R+5$

On fait la division euclidienne : $\boxed{\frac{R^4+4.R^3+6.R^2+4.R+5}{R^2+4.R+5}=R^2+1}$

$R^2+1=0 \ \rightarrow R^2=-1=I^2 \ \rightarrow R_{3,4}=0\pm 1.I$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{1,2}=-2\pm I \\ R_{3,4}=+0\pm I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\exp(-2.x).\cos(x) \\ y_2=\exp(-2.x).\sin(x) \\ y_3=\exp(0.x).\cos(x) \\ y_4=\exp(0.x).\sin(x) \end{cases}$$

$$y_H(x)=C_1.y_1+C_2.y_2+C_3.y_3+C_4.y_4$$

$$\boxed{y_H(x)=\exp(-2.x)(C_1.\cos(x)+C_2.\sin(x)) + \ C_3.\cos(.x)+C_4.\sin(x)}$$

Exercice5 :

- On donne la solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constant ordre *N* par :

$$y(x)=y_H=\left(C_1+C_2.x\right).e^x+\left(C_3+C_4.x\right).e^{2.x}$$

- Déduire les solutions **y_1 , y_2 ,....., y_N** de l'équation E.S.S.M .
- Trouvez l'équation caractéristique (E.C) d'E.S.S.M ?
- Déduire l'équation différentielle sans second membre (E.S.S.M)?

Solution :

- On donne la solution d'une équation différentielle linéaire à coefficient constant par :

$$y(x)=y_H=\left(C_1+C_2.x\right).e^x+\left(C_3+C_4.x\right).e^{2.x}$$

- Déduire l'équation caractéristique (E.C) d'E.S.S.M ?

$y_H(x)=C_1.y_1+C_2.y_2+C_3.y_3+C_4.y_4$ Par identification :

$$\begin{cases} y_1=e^x \\ y_2=x.e^x \\ y_3=e^{2.x} \\ y_4=x.e^{2.x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1=1 \\ R_2=1 \\ R_3=2 \\ R_4=2 \end{cases}$$ on fait le produit des racines : $$\left(R-1\right).\left(R-1\right).\left(R-2\right).\left(R-2\right)=0$$ $$\left(R^2-2.R+1\right).\left(R^2-4.R+4\right)=0$$

donc équations caractéristique E.C : $\boxed{R^4-6.R^3+13.R^2-12.R+4=0}$

- Déduire équation différentielle sans second membre **(E.S.S.M)?**

$$\boxed{\frac{d^4y}{dx^4}-6.\frac{d^3y}{dx^3}+13.\frac{d^2y}{dx^2}-12.\frac{dy}{dx}+4.y=0}$$

Exercice6:

- Développez le polynôme suivant : $\Psi(z)=\left(z^2-1\right).\left(z^2+2.z+5\right)$
- Résoudre les équations différentielles suivantes : $\frac{d^4y}{dx^4}+2.\frac{d^3y}{dx^3}+4.\frac{d^2y}{dx^2}-2.\frac{d\ y}{dx}-5.y=0$
- Trouvez la transformation inverse de Laplace de la fonction suivant :

$$y(t)=TL^{-1}\left[\frac{P^4-17.P^3+12.P^2+3.P+7}{(P-1).\Psi\left(P\right)}\right]$$

Solution :

Développez le polynôme suivant :

$\Psi(z)=\left(z^2-1\right).\left(z^2+2.z+5\right)\rightarrow \boxed{\Psi(z)=z^4+2.z^3+4.z^2-2.z-5}$

- Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2.\frac{d^3y}{dx^3}+4.\frac{d^2y}{dx^2}-2.\frac{d\ y}{dx}-5.y=0$$

E.S.S.M $\rightarrow y_H=?$

E.C $\rightarrow R^4+2.R^3+4.R^2-2.R-5=0 \quad \rightarrow \left(R^2-1\right).\left(R^2+2.R+5\right)=0$

$$R^2-1=0\rightarrow R^2=1\rightarrow\begin{cases}R_1=-1\\R_2=+1\end{cases}$$

$R^2+2.R+5=0$; $\Delta=2^2-4.1.5=-16=(4.I)^2$

$$R_{3,4}=\frac{-2\pm4.I}{2}=-1\pm2.I$$

$$\left.\begin{cases}y_1=e^{-x}\\y_2=e^{+x}\\y_3=e^{-x}.\cos(2.x)\\y_4=e^{-x}.\sin(2.x)\end{cases}\right\}\rightarrow \begin{array}{l}y_H=C_1.y_1+C_2.y_2+C_3.y_3+C_4.y_4\\y_H=C_1.e^{-x}+C_2.e^{+x}+e^{-x}.\left(C_3.\cos(2.x)+C_4.\sin(2.x)\right)\end{array}$$

- Trouvez la transformation inverse de Laplace de la fonction suivant :

$$y(t)=TL^{-1}\left[\frac{P^4-17.P^3+12.P^2+3.P+7}{(P-1).\Psi\left(P\right)}\right] \quad y(t)=TL^{-1}\left[\frac{P^4-17.P^3+12.P^2+3.P+7}{(P+1).\left(P-1\right)^2.\left((P+1)^2+2^2\right)}\right]$$

$$y(t)=TL^{-1}\left[\frac{a_1}{P+1}+\frac{a_2.(P-1)+a_3}{\left(P-1\right)^2}+\frac{a_4.(P-\alpha)+\beta.a_5}{(P-\alpha)^2+\beta^2}\right]$$

$$\boxed{y_{(t)}=a_1.e^{-t}+a_2.e^{+t}+a_3.t.e^{+t}+a_4.e^{-t}.\cos(2.t)+a_5.e^{-t}.\sin(2.t)}$$