Chapitre 4 : Transformation de Laplace

Soit f(t) une fonction défini sur l'intervalle $t \in [0,+\infty[$. On appelle TL(f(t)) l'intégrale de Laplace ou Transformation de Laplace Tel que $\boxed{TL(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)*\exp(-P.t).dt = F(P)}$

On Note : $f(t) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftarrows}} F(p)$ Avec la transformation inverse de Laplace $\boxed{TL^{-1}\left(F(p)\right) = f(t)}$

Exercice 1 :

En utilisant la transformation de Laplace : $\boxed{TL(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)*\exp(-P.t).dt = F(P)}$ déduire :

- $f(t) = a = C^{st}$ $\rightarrow$ $\boxed{TL(a) = \int_0^{\infty} a.\mathrm{e}^{-P.t}.dt = \frac{a}{-P}.\int_0^{\infty} -P.\mathrm{e}^{-P.t}.dt = \frac{a}{-P}.\left(\mathrm{e}^{-P.t}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{a}{-P}.\left(\mathrm{e}^{-\infty} - \mathrm{e}^{0}\right) = \frac{a}{P}}$
- $f(t) = \exp(a.t)$ $\rightarrow$

$$\boxed{TL(\mathrm{e}^{a.t}) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{a.t}.\mathrm{e}^{-P.t}.dt = \frac{1}{-(P-a)}.\int_0^{\infty} -(P-a).\mathrm{e}^{-(P-a).t}.dt = \frac{1}{-(P-a)}.\left(\mathrm{e}^{-(P-a).t}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-(P-a)}.\left(\mathrm{e}^{-\infty} - \mathrm{e}^{0}\right) = \frac{1}{P-a}}$$

- On pose $a = \alpha + \beta.I$ déduire TL :

$$TL(\mathrm{e}^{(\alpha+\beta.I).t}) = \frac{1}{P-(\alpha+\beta.I)} = \frac{1}{P-\alpha-\beta.I} * \frac{P-\alpha+\beta.I}{P-\alpha+\beta.I} = \frac{P-\alpha+\beta.I}{(P-\alpha)^2+\beta^2} = \underbrace{\frac{P-\alpha}{(P-\alpha)^2+\beta^2}}_{\mathrm{Re}el} + I.\underbrace{\frac{\beta}{(P-\alpha)^2+\beta^2}}_{imaginaire}$$

$$TL\left(\exp\left((\alpha+\beta.I).t\right)\right) = \underbrace{TL\left(\exp(\alpha.t).\cos\left(\beta.t\right)\right)}_{\mathrm{Re}el} + I.\underbrace{TL\left(\exp(\alpha.t).\sin\left(\beta.t\right)\right)}_{imagenaire}$$ Par identification on déduire :

- $f(t) = \exp(\alpha.t).\cos\left(\beta.t\right)$ $\rightarrow$ $\boxed{TL(\exp(\alpha.t)*\cos(\beta.t)) = \frac{P-\alpha}{(P-\alpha)^2+\beta^2}}$
- $f(t) = \exp(\alpha.t).\sin\left(\beta.t\right)$ $\rightarrow$ $\boxed{TL(\exp(\alpha.t)*\sin(\beta.t)) = \frac{\beta}{(P-\alpha)^2+\beta^2}}$
- On pose $\alpha = 0$ on déduire TL

$$\boxed{TL(\cos(\beta.t)) = \frac{P}{P^2+\beta^2}} \; ; \quad \boxed{TL(\sin(\beta.t)) = \frac{\beta}{P^2+\beta^2}}$$

Exercice 2 :

- **En utilisant Théorème dérivation de l'image** $\boxed{TL\left(t^N.f(t)\right) = (-1)^N.\frac{d^N}{dP^N}\left[TL\left(f(t)\right)\right]}$ déduire :

- $TL\left[t^1.\cos\left(\beta.t\right)\right] = ? \rightarrow$ on a $f(t) = Cos\left(\beta.t\right)$ et $N = 1$ Donc :

$$TL\left[t^1.\cos\left(\beta.t\right)\right] = (-1)^1.\frac{d^1}{dP^1}\left[TL\left(\cos\left(\beta.t\right)\right)\right] = -\frac{d^1}{dP^1}\left[\frac{P}{P^2+\beta^2}\right] = -\frac{1.\left(P^2+\beta^2\right)-2.P.P}{\left(P^2+\beta^2\right)^2} = \frac{P^2-B^2}{\left(P^2+B^2\right)^2}$$

- $TL\left[t^1.Sin\left(\beta.t\right)\right] = ? \rightarrow$ on a $f(t) = Sin\left(\beta.t\right)$ et $N = 1$ Donc :

$$TL\left[t^1.Sin\left(\beta.t\right)\right] = (-1)^1.\frac{d^1}{dP^1}\left[TL\left(Sin\left(B.t\right)\right)\right] = -\frac{d^1}{dP^1}\left[\frac{\beta}{P^2+\beta^2}\right] = -\frac{0-2.P.\beta}{\left(P^2+\beta^2\right)^2} = \frac{2.P.B}{\left(P^2+B^2\right)^2}$$

- on a $TL(1) = \frac{1}{P}$ déduire :

- $TL[t*1] = ? \rightarrow$ on a $f(t) = 1$ et $N = 1$ **Donc** : $TL\left[t^1*1\right] = (-1)^1.\frac{d^1}{dP^1}\left[TL(1)\right] = -\frac{d^1}{dP^1}\left[\frac{1}{P}\right] = -\frac{0-1}{P^2} = \frac{1}{P^2}$
- $TL\left[t^2\right] = TL[t*t] = ? \rightarrow$ On a $f(t) = t$ et $N = 1$ **Donc** :

$$TL\left[t^1*t\right] = (-1)^1.\frac{d^1}{dP^1}\left[TL(t)\right] = -\frac{d^1}{dP^1}\left[\frac{1}{P^2}\right] = -\frac{0-2.P}{P^4} = \frac{2}{P^3}$$

- Même chose $\boxed{TL(t^3) = TL(t*t^2) = \frac{1*2*3}{P^4}}$, $\boxed{TL(t^4) = TL(t*t^3) = \frac{1*2*3*4}{P^5}}$, **Donc** $\boxed{TL(t^N) = \frac{N!}{P^{N+1}}}$

➢ **En utilisant théorème de translation** :

$$\boxed{TL\left[e^{a.t} * f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{a.t} * f(t) * e^{-P.t}.dt = \int_0^{\infty} f(t) * e^{-(P-a).t}.dt = F(P-a)}$$ déduire :

$$\boxed{TL\left[t*\exp(\alpha.t).\cos(\beta.t)\right] = \frac{(P-\alpha)^2 - B^2}{\left((P-\alpha)^2 + B^2\right)^2}} ; \boxed{TL\left[t*\exp(\alpha.t).\sin(\beta.t)\right] = \frac{2.(P-\alpha).B}{\left((P-\alpha)^2 + B^2\right)^2}}$$

$$\boxed{TL\left(t^N.e^{a.t}\right) = \frac{N!}{(P-a)^{N+1}}}$$

Exercice 3 : En se basant sur la loi principale de TL: $\boxed{TL(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) * \exp(-P.t).dt = F(P)}$ On déduire :

- $TL\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = ? \rightarrow$ on a $f(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ donc $TL\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = \int_0^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} * \exp(-P.t).dt = \int_0^{\infty} \exp(-P.t).dy$

l'intégration par parties : $\rightarrow$ $\boxed{\int U.dV = U * V - \int V.dU}$

$$\left.\begin{array}{l} U = \exp(-P.t) \xrightarrow{derive} dU = -P.\exp(-P.t).dt \\ dV = dy \xrightarrow{integral} V = y \end{array}\right\} \rightarrow TL\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = y(t).\exp(-P.t)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P.y(t) * \exp(-P.t).dt$$

$$\rightarrow TL\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = y(\infty).\exp(-\infty) - y(0).\exp(0) + P.\underbrace{\int_0^{\infty} y(t) * \exp(-P.t).dt}_{TL(y(t))} \rightarrow \boxed{TL\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = P.TL\left(y(t)\right) - y(0)}$$

Même chose pour :

- $\boxed{TL\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) = P^2.TL\left(y(t)\right) - P.y(0) - y'(0)}$
- $\boxed{TL\left(\frac{d^3y(t)}{dt^3}\right) = P^3.TL\left(y(t)\right) - P^2.y(0) - P.\frac{dy(0)}{dt} - \frac{d^2y(0)}{dt^2}}$
- $\boxed{TL\left(\frac{d^Ny(t)}{dt^N}\right) = P^N.TL(y(t)) - P^{N-1}.y(0) - P^{N-2}.\frac{d\ y(0)}{dt} - P^{N-3}.\frac{d^2y(0)}{dt^2} - P^{N-4}.\frac{d^3y(0)}{dt^3} - \ldots\ldots\ldots - P^0.\frac{d^{N-1}y(0)}{dt^{N-1}}}$

Remarque : $y(0)$; $\frac{d\ y(0)}{dt}$; $\frac{d^2y(0)}{dt^2}$; $\frac{d^3y(0)}{dt^3}$; $\frac{d^{N-1}y(0)}{dt^{N-1}}$ **sont des conditions initiales**

Exercice 4 : En utilisant TL Résoudre l'équation différentielle :

$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 5.\frac{dy(t)}{dt} + 6.y(t) = 1}$ Avec les conditions initiales $y_{(0)} = 2 \ \ et \ \ y'_{(0)} = 3$

On introduire opérateur Laplace : $\rightarrow TL\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 5.\frac{dy(t)}{dt} + 6.y(t) = 1\right)$

On a : $\boxed{TL\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) = P^2.TL\left(y(t)\right) - P.y(0) - y'(0)}$; $\boxed{TL\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = P.TL\left(y(t)\right) - y(0)}$ et $\boxed{TL(1) = \frac{1}{P}}$

On remplace dans l'équation on trouve : $P^2.TL\left(y(t)\right) - P.y(0) - y'(0) - 5.\left(P.TL\left(y(t)\right) - y(0)\right) + 6.TL\left(y(t)\right) = \frac{1}{P}$

$$(P^2 - 5.P + 6).TL\left(y(t)\right) - 2.P - 3 + 5*2 = \frac{1}{P} \rightarrow (P^2 - 5.P + 6).TL\left(y(t)\right) = \frac{1}{P} + 2.p - 7 \rightarrow TL\left(y(t)\right) = \frac{2.P^2 - 7.P + 1}{P.\left(P^2 - 5.P + 6\right)}$$

En utilisant la méthode **décomposition,** pour trouver la transformation inverse de Laplace :

$$y(t) = TL^{-1}\left(\frac{2.P^2 - 7.P + 1}{P.\left(P^2 - 5.P + 6\right)}\right) \rightarrow y(t) = TL^{-1}\left(\frac{2.P^2 - 7.P + 1}{P.(P-2).(P-3)}\right)$$

On fait la décomposition de la fraction rationnelle on trouve : $\boxed{y(t) = TL^{-1}\left(\frac{A}{P} + \frac{B}{P-2} + \frac{C}{P-3}\right)}$

$$y(t)=TL^{-1}\left(\frac{(A+B+C).P^2+(-5.A-3.B-2.C).P+6.A}{P.(P-2).(P-3)}\right) \text{ Par identification : } \begin{cases}A+b+C=2\\-5.A-3.b-2.C=-7\\6.A=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=1/6\\b=5/2\\C=-2/3\end{cases}$$

En utilisant la transformation inverse de Laplace :

$$\boxed{y(t)=A.TL^{-1}\left(\frac{1}{P}\right)+b.TL^{-1}\left(\frac{1}{P-2}\right)+C.\,TL^{-1}\left(\frac{1}{P-3}\right)} \quad \rightarrow \quad \boxed{y(t)=A+b.e^{2.t}+C.e^{3.t} \rightarrow y(t)=\frac{1}{6}+\frac{5}{2}.e^{2.t}-\frac{2}{3}.e^{3.t}}$$

Exercice 5:

- **Trouvez la transformation inverse de TL**

$$y(t)=TL^{-1}\left(\frac{-2P^2-13P-20}{(P+3)^3}\right) \rightarrow y(t)=TL^{-1}\left(\frac{A.(P+3)^2+b.(P+3)+C}{(P+3)^3}\right)\rightarrow \boxed{y(t)=TL^{-1}\left(\frac{A}{(P+3)^1}+\frac{b}{(P+3)^2}+\frac{C}{(P+3)^3}\right)}$$

$$\rightarrow y(t)=TL^{-1}\left(\frac{A.P^2+(6.A+b).P+9.A+3.b+C}{(P+3)^3}\right) \quad \text{Par identification : } \begin{cases}A=-2\\6.A+b=-13\\9.A+3.b+C=-20\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-2\\b=-1\\C=1\end{cases}$$

En utilisant le transformé Laplace : $\boxed{TL\left(t^N.e^{a.t}\right)=\frac{N!}{(P-a)^{N+1}}}$

$$\boxed{y(t)=\underbrace{TL^{-1}\left(\frac{A.1}{(P+3)}\right)}_{N=0}+\underbrace{TL^{-1}\left(\frac{b.1}{(P+3)^2}\right)}_{N=1}+\frac{1}{2}.\underbrace{TL^{-1}\left(\frac{2.C}{(P+3)^3}\right)}_{N=2}}$$

On a donc $\boxed{y(t)=A.e^{-3.t}+b.t.e^{-3.t}+C.\frac{t^2}{2}.e^{-3}} \rightarrow y(t)=\left(-2-t+\frac{t^2}{2}\right).e^{-3t}$

Exercice 6 :

Trouvez la transformation inverse de Laplace des fonctions suivant :

$$y(t)=TL^{-1}\left[\frac{P^4+5.P^3+3.P^2-7.P+3}{P.(P+3).(P^3+27)}\right]$$

Recherche les solutions ou les racines de : $P^3+27=0\rightarrow P^3=-27 \rightarrow P=-\sqrt[3]{27}=-3$

On fait la division euclidienne : $\frac{P^3+27}{P-(-3)}=P^2-3.P+9$

Donc le dénominateur : $P.(P+3).(P^3+27)=P.(P+3)^2.\left(P^2-3.P+9\right)$

On cherche les racines de : $P^2-3.P+9=0$; on calcule : $\Delta=3^2-4.1.9=-27=27.I^2$ Donc on a des racines complexes $P_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{3\pm3\sqrt{3}.I}{2}=\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.I = \alpha\pm\beta.I$; $\boxed{\alpha=\frac{3}{2}}$; $\boxed{\beta=\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

Donc : $P^2-3.P+9=\left((P-\alpha)^2+\beta^2\right)$

Donc : $$y(t)=TL^{-1}\left(\frac{P^4+5.P^3+3.P^2-7.P+3}{P.(P+3)^2.\left((P-\alpha)^2+\beta^2\right)}\right) \rightarrow y(t)=TL^{-1}\left(\frac{A}{P}\right)+TL^{-1}\left(\frac{b.(P+3)+C}{(P+3)^2}\right)+TL^{-1}\left(\frac{D.(P-\alpha)+\beta.E}{(P-\alpha)^2+\beta^2}\right)$$

$$y(t)=TL^{-1}\left(\frac{A}{P}\right)+TL^{-1}\left(\frac{b}{P+3}\right)+TL^{-1}\left(\frac{C}{(P+3)^2}\right)+D.TL^{-1}\left(\frac{P-\alpha}{(P-\alpha)^2+\beta^2}\right)+E.TL^{-1}\left(\frac{\beta}{(P-\alpha)^2+\beta^2}\right)$$

$$\boxed{y(t)=A+b.e^{-3.t}+C.t.e^{-3.t}+D.e^{\frac{3}{2}.t}.\cos(\frac{3\sqrt{3}}{2}.t)+E.e^{\frac{3}{2}.t}.Sin(\frac{3\sqrt{3}}{2}.t)}$$

Exercice 7 :

En utilisant TL Résoudre l'équation différentielle :

- $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6.\frac{dy(t)}{dt}+9.y(t)=\exp(-3.t)$ Avec les conditions initiales $y_{(0)}=-2$ *et* $\frac{dy(0)}{dt}=5$
- $\frac{d^3y(t)}{dt^3}+27.y(t)=1+\exp(-3.t)$ Avec les conditions initiales $y_{(0)}=1$, $\frac{dy(0)}{dt}=2$ *et* $\frac{d^2y(0)}{dt^2}=-3$