MATRICE ADMITTANCE
D'UN SYSTEME DE PUISSANCE (RESEAUX ELECTRIQUES)

1. Introduction

La détermination du comportement ou des performances d'un système de puissance (réseau électrique) requiert la formulation d'un modèle mathématique approprié. La plupart de ces modèles englobe soit :

- la matrice admittance,

Ou :

- la matrice impédance.

La matrice admittance est :

- dressée à partir de la configuration du système de puissance (réseau électrique),
- utilisée pour diverses études et analyses des systèmes de puissance, tel que :
  - l'écoulement de puissance,
  - le calcul des courts-circuits.
- basée sur la loi de courant de Kirchhoff et peut être facilement éparpillée pour la plupart des systèmes de puissance de grandes dimensions.

2. Détermination de la matrice admittance

2-1. Mise en équations du système de puissance (réseaux électriques)

Les équations des systèmes de puissance (réseaux électriques) sont déterminées en se basant sur :

- les équations du réseau primitif,
- les donnés du réseau primitif.

En se référant aux jeux de barres (nœuds), les performances d'un système de puissance (réseau électrique) interconnecté sont décrites par :

- $n-1$ indépendantes équations de nœuds.

Où :

n : Le nombre des jeux de barres (nœuds) du système de puissance (réseau électrique).

En forme matricielle, l'équation de performance en forme d'admittance s'écrit comme suit :

$$\bar{I}_{JB} = Y_{JB}.\bar{V}_{JB}$$

Où :

$\bar{V}_{JB}$: Vecteur des tensions des jeux de barres (nœuds) où les tensions sont mesurées par rapport au nœud de référence.

$\bar{I}_{JB}$: Vecteur des courants entrants aux jeux de barres (nœuds).

Y_{JB} : Vecteur des admittances des jeux de barres (nœuds).

2-1-1. Equation d'un réseau électrique primitive

N'importe quel élément du réseau électrique lié entre deux nœuds peut être représenté sous forme d'admittance par le schéma électrique suivant :

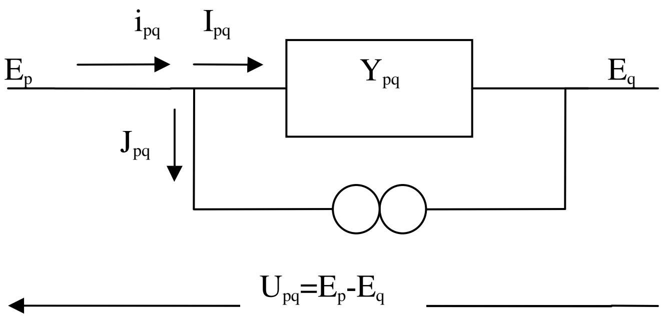

Fig. 1 : Sous forme d'admittance.

Où les variables de l'élément sont :

U_{pq} : la tension aux bornes de l'élément p-q

i_{pq} : le courant traversant l'élément p-q.

J_{pq} : le courant de la source en parallèle avec l'élément p-q.

Et le paramètre de cet élément est :

Y_{pq} : admittance de l'élément p-q.

L'équation de performance de courant de l'élément en forme d'admittance s'écrit :

$$i_{pq} + j_{pq} = y_{pq}.\ u_{pq} \qquad (1)$$

Où :

$$I_{pq} = i_{pq} + J_{pq} \qquad (2)$$

Avec :

$$J_{pq} = - y_{pq}.e_{pq}$$

Pour **m** éléments, sous forme matricielle, l'équation de performance s'écrit comme suit :

$$i + J = [y] . v \tag{3}$$

Où :

- les éléments de la diagonale la matrice [y] du réseau électrique primitif sont les admittances propres $Y_{pq,qp}$,
- le reste des éléments de la matrice sont les impédances mutuelles $Y_{pq,rs}$ entre les éléments p-q et les éléments r-s.

2-2. Equation d'un système de puissance (réseau électrique)

En se référant aux jeux de barres (nœuds), les performances d'un système de puissance (réseau électrique) interconnecté sont décrites par :

- $n-1$ indépendantes équations de nœuds.

Où n est le nombre des jeux de barres (nœuds) du système de puissance (réseau électrique).
En forme matricielle l'équation de performance en forme d'admittance s'écrit comme suit :

$$\overline{I}_{JB} = Y_{JB}.\overline{V}_{JB} \tag{4}$$

Où :

$\overline{V}_{JB}$: Vecteur des tensions des jeux de barres (nœuds) mesurées par rapport au nœud de référence.

$\overline{I}_{JB}$: Vecteur des courants entrants aux jeux de barres (nœuds).

3. Matrice admittance d'un système de puissance (réseau électrique)

3-1. Formation de la matrice admittance

On peut former la matrice admittance par une :

- méthode directe,
- méthode topographique,
- autres…………………

3-1-1. Méthode directe

La formation de la matrice admittance :

- exige la connaissance de la matrice primitive du système puissance,
- sa formation est facile,
- elle est éparpillée pour les systèmes de puissance larges, c'est-à-dire, qu’elle est une matrice creuse.
- elle est utilisée pour résoudre le modèle mathématique (4).

Exemple :

Cas d’un système de puissance à trois jeux de barres :

Soit le schéma équivalent d’un système de puissance (réseau électrique) à trois jeux de barres (nœuds) suivant :

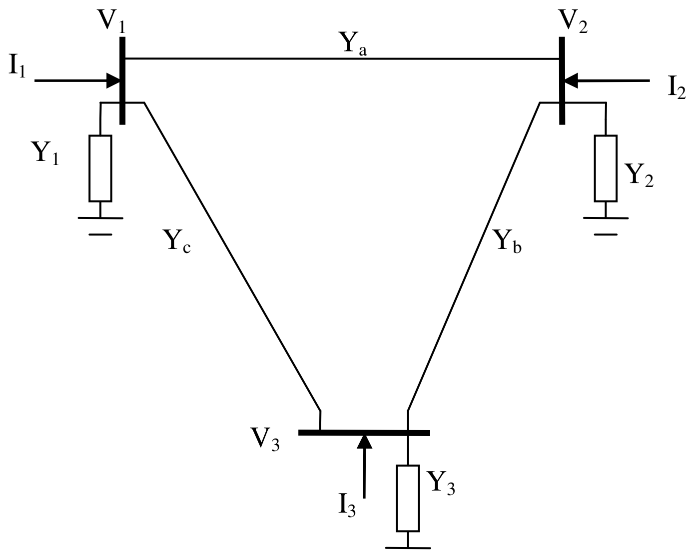

Fig. 2 : Schéma équivalent du réseau à trois jeux de barres.

En appliquant la loi de courant de Kirchhoff respectivement pour les jeux de barres (nœuds) 1, 2 et 3, on obtient :

$$I_1 = V_1 \cdot Y_1 + (V_1 - V_2) \cdot Y_a + (V_1 - V_3) \cdot Y_c \tag{5}$$

$$I_2 = V_2 \cdot Y_2 + (V_2 - V_1) \cdot Y_a + (V_2 - V_3) \cdot Y_b \tag{6}$$

$$I_3 = V_3 \cdot Y_3 + (V_3 - V_1) \cdot Y_c + (V_3 - V_2) \cdot Y_b \tag{7}$$

Après arrangement, les équations (5)-(7) deviennent :

$$I_1 = +(Y_a + Y_b + Y_1) \cdot V_1 - Y_b \cdot V_2 - Y_a \cdot V_3 \tag{8}$$

$$I_2 = -Y_b \cdot V_1 + (Y_b + Y_c + Y_2) \cdot V_2 - Y_c \cdot V_3 \tag{9}$$

$$I_3 = -Y_a \cdot V_1 - Y_c \cdot V_2 + (Y_c + Y_a + Y_3) \cdot V_3 \tag{10}$$

Sous forme matricielle, le système d'équations (8)-(10) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + \mathrm{Y}_1 & -Y_b & -Y_a \\ -Y_b & Y_b + Y_c + \mathrm{Y}_2 & -Y_c \\ -Y_a & -Y_b & Y_c + Y_a + \mathrm{Y}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

A partir de la matrice (11) on observe que :

- La matrice $[Y]$ est symétrique, donc on a besoin que du stockage des éléments du triangle supérieur de la matrice.
- Chaque élément de la diagonale est la somme des impédances de toutes les branches connectées directement au jeu de barres (nœud) considéré.
- Les autres éléments de la matrice contiennent chacun la somme négative des admittances des branches connectées directement entre les jeux de barres considérés.

N.B. : Dans un système de puissance électrique (réseau électrique) typique réel, chaque jeu de barres est connecté seulement à quelques jeux de barres tout proches. En conséquence, plusieurs éléments de la matrice sont alors nuls. Ce type de matrice obtenue s'appelle matrice creuse.

Cas d'un système de puissance à *n* jeux de barres :

Pour un système à n jeux de barres (nœuds), l'équation (11) devient :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdots \\ I_i \\ \cdots \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots\ldots & Y_{1i} & \ldots\ldots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots\ldots & Y_{2i} & \ldots\ldots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ Y_{i1} & Y_{i2} & \ldots\ldots & Y_{ii} & \ldots\ldots & Y_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \ldots\ldots & Y_{ni} & \ldots\ldots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdots \\ V_i \\ \cdots \\ V_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

- Les éléments de la diagonale principale sont appelés les selfs admittances et ils sont déterminés en utilisant la relation suivante :

$$Y_{ii} = \sum_{j=0}^{n} y_{ij} \qquad i \neq j \tag{13}$$

- Les autres éléments sont appelés les admittances mutuelles, la valeur de chaque élément est égale à la valeur négative de l'admittance entre les jeux de barres considérés :

$$Y_{ij} = Y_{ji} = -y_{ij} \tag{14}$$

3-1-1-1. Formation de la matrice admittance par programmation

Cette procédure est facile à exécuter à l'aide d'un programme pour former la matrice $[Y]$. Avec les règles mentionnées ci-dessus, il est facile de développer un programme qui permet de former la matrice admittance dont les étapes sont les suivantes :

1. Ayant une matrice carrée de dimension égale au nombre des jeux de barres.
2. Convertir toutes les impédances des éléments du réseau à des admittances.
3. Les éléments de la diagonale sont déterminés en utilisant la relation (13).
4. Les autres éléments de la diagonale sont déterminés en utilisant la relation (14).

3-1-2. Méthode topographique

3-1-2-1. Matrice admittance des nœuds

On peut transformer les équations primitives d'un réseau électrique en **n** équations qui représentent les performances de ce réseau par rapport à ces nœuds. Cela est réalisé en utilisant la matrice incidente ou d'incidence [A] qui détermine les relations entre les variables, les coefficients des équations primitives et les valeurs aux nœuds du réseau électrique et cela comme suit :

L'équation de performance du réseau électrique primitif s'écrit :

$$\bar{i} + \bar{j} = [y]\bar{v} \tag{1}$$

Multipliant cette équation par le transposé A^t , on obtient :

$$A^t.\bar{i} + A^t.\bar{j} = A^t.[y]\bar{v} \tag{2}$$

Selon la loi de Kirchhoff des courants (la somme des courants sortants et entrants est nulle), on peut écrire alors :

$$A^t.\bar{i} = 0 \tag{3}$$

De manière similaire, le terme $A^t.\bar{j}$ donne la somme algébrique des courants des sources dans chaque nœud et qui est égale :

$$A^t.\bar{j} = \bar{I}_{bus} \tag{4}$$

Substituons les équations (3) et (4) dans l'équation (2) on obtient :

$$\overline{I}_{bus} = A^t.[y].\overline{v} \tag{5}$$

La puissance dans un système de puissance (réseau électrique) interconnecté est égale à $\left(\overline{I}^*_{bus}\right)^t.\overline{E}_{bus}$ et qui doit être égale à la somme des puissances dans le réseau électrique primitif qui est égale à $\left(\overline{J}^*\right)^t.\overline{v}$, d'où on écrit :

$$\left(\overline{I}^*_{bus}\right)^t.\overline{E}_{bus} = \left(\overline{J}^*\right)^t.\overline{v} \tag{6}$$

Prenons le transposé du conjugué de l'équation (4), on obtient :

$$\left(\overline{I}^*_{bus}\right)^t = \left(\overline{J}^*\right)^t.A^* \tag{7}$$

Puisque [A] est une matrice réelle, d'où :

$$A^*=A$$

En conséquence, l'équation (7) devient :

$$\left(\overline{I}^*_{bus}\right)^t = \left(\overline{J}^*\right)^t.A \tag{8}$$

Substituons l'équation (8) dans l'équation (6), on obtient :

$$\left(\overline{J}^*_{bus}\right)^t.A.\overline{E}_{bus} = \left(\overline{J}^*\right)^t.\overline{v} \tag{9}$$

Pui

sque cette équation est valide pour toutes les valeurs de $\overline{J}$, il s'ensuit :

$$A.\overline{E}_{bus} = \overline{v} \tag{10}$$

Substituons l'équation (10) dans l'équation (5), on obtient :

$$\overline{I}_{bus} = A^t.[y].A.\overline{E}_{bus} \tag{11}$$

Et sachant que l'équation de performance d'un système de puissance (réseau électrique) à la forme suivante :

$$\overline{I}_{bus} = Y_{bus}.\overline{E}_{bus} \tag{12}$$

En comparant les équations (11) et (12), on déduit la matrice admittance des nœuds:

$$\boxed{Y_{bus} = A^t.[y].A} \tag{13}$$

La matrice **A** est une matrice singulière, d'où $A^t.[y].A$ est une transformation singulière de la matrice **A**.

N.B. : l'indice *bus* est en anglais son équivalent en français est l'indice *JB* (jeux de barres ou nœuds).