

## TD 2 P1 (F211) (Cinématique du point matériel) Semaine2

**Exercice 1 :**

$$\vec{V} = 2\vec{i} + 2t\vec{j}, \text{ A } t = 0\text{s} \Rightarrow M(0, 3)$$

1 Le module de la vitesse :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2 Le vecteur accélération  $\vec{a}$  et son module :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(2\vec{i} + 2t\vec{j}) = 2\vec{j} \Rightarrow \|\vec{a}\| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3 Déterminer le vecteur position  $\overline{OM}$ :

$$\begin{aligned} \vec{V} = \frac{d\overline{OM}}{dt} \Rightarrow \overline{OM} = \int \vec{V} dt &\Rightarrow \begin{cases} x = \int v_x dx \\ y = \int v_y dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \int 2 dx \\ y = \int 2t dy \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 2t + C_1 \\ y = t^2 + C_2 \end{cases} \end{aligned}$$

A  $t = 0\text{s} \Rightarrow M(0, 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 2(0) + C_1 \\ 3 = (0)^2 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 + 3 \end{cases}$$

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = 2t\vec{i} + (t^2 + 3)\vec{j}$$

4 L'équation de la trajectoire :

On a :

$$\begin{cases} x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2} \\ y = t^2 + 3 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + 3 \text{ (m)}$$

5 Les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération et le rayon de courbure de courbure pour  $t=1\text{s}$ .

• L'accélération tangentielle pour  $t=1\text{s}$  :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{4 + 4t^2}) = \frac{8t}{2\sqrt{4 + 4t^2}} \Rightarrow a_T = \frac{4t}{2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{à } t = 1\text{s} \Rightarrow a_T = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- L'accélération normale pour  $t=1\text{s}$  :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 4 - \frac{4t^2}{1+t^2} = \frac{4+4t^2-4t^2}{1+t^2}$$

$$a_N^2 = \frac{4}{1+t^2} \Rightarrow a_N = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \text{à } t = 1\text{s} \Rightarrow a_N = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Le rayon de courbure de courbure pour  $t=1\text{s}$ .

$$a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{4(1+t^2)}{\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}} = 2(1+t^2)\sqrt{1+t^2} = 2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$R = 2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{à } t = 1\text{s} \Rightarrow R = 2(1+1^2)^{\frac{3}{2}} = 5.656 \text{ m}$$

**Exercice 2 :**

$$\begin{cases} y = x^2 = 4t^2 \\ x = 2t \end{cases}$$

- La vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \text{ et } \vec{OM} = 2t\vec{i} + 4t^2\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = 2\vec{i} + 8t\vec{j} \Rightarrow \|\vec{V}\| = \sqrt{2^2 + (8t)^2} = \sqrt{4 + 64t^2} = 2\sqrt{1 + 16t^2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- L'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 8\vec{j} \Rightarrow \|\vec{a}\| = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- L'accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{4 + 64t^2}) = \frac{2(64)t}{2\sqrt{4 + 64t^2}} \Rightarrow a_T = \frac{64t}{\sqrt{4 + 64t^2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- L'accélération normale :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 8^2 - \frac{(64t)^2}{4 + 64t^2} = \frac{64 \times 4 + 64 \times 64t^2 - (64t)^2}{4 + 64t^2}$$

$$a_N^2 = \frac{64 \times 4}{4 + 64t^2} = \frac{64}{1 + 16t^2} \Rightarrow a_N = \frac{8}{\sqrt{1 + 16t^2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Le rayon de courbure de la trajectoire :

$$a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{2(1 + 16t^2)}{\frac{8}{\sqrt{1 + 16t^2}}} = \frac{(1 + 16t^2)\sqrt{1 + 16t^2}}{4}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(1 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}}{4} \text{ m}$$

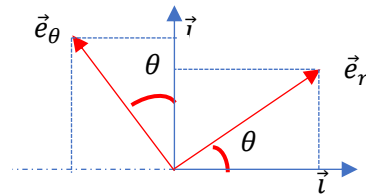
**Exercice 3 :**

$$\begin{cases} r(t) = e^t \\ \theta(t) = t \end{cases} \quad (\text{t en s, r en mètre et } \theta \text{ en rad})$$

1.  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  en fonction de  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Par projection on obtient :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$$



2. Le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées polaires.

En coordonnées polaires :  $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = e^t\vec{e}_r$

3. Le vecteur vitesse  $\vec{V}$  et son module :

- Le vecteur vitesse  $\vec{V}$  :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = e^t \\ \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{cases} \text{ et } \dot{\theta} = 1 \Rightarrow \vec{V} = e^t(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$$

- Le Module :  $\|\vec{V}\| = e^t\sqrt{1^2 + 1^2} = e^t\sqrt{2}$

4. Le vecteur accélération  $\vec{a}$  et son module

- Le vecteur accélération  $\vec{a}$  :  $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (\dot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = e^t \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases} \text{ et } \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \vec{a} = (e^t - e^t)\vec{e}_r + 2e^t\vec{e}_\theta = 2e^t\vec{e}_\theta$$

- Le Module :  $\|\vec{a}\| = \sqrt{(2e^t)^2} = 2e^t$

1. Déduire le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées cartésiennes.

On a:  $\begin{cases} x = r \cos \theta = e^t \cos t \\ y = r \sin \theta = e^t \sin t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = e^t(\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j})$