

Chapitre 1

ÉLECTROSTATIQUE

« »

I.1. CHARGES

Dans tout phénomène physique intervient un « objet ». En électrostatique, l'objet est une charge, mesurée en coulomb (C) dans le système international.

Il existe deux types de charge électrique : « positives » et « négatives ».

les charges de même nature se repoussent tandis que celles qui sont de nature différente s'attirent.

Toute charge est multiple de la charge élémentaire :

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ [C]}$$

Les atomes sont constitués de particules chargées, à savoir :

* les électrons : (e^-) responsables de la conduction électrique dans les métaux :

$$\text{charge : } q_e = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C,} \quad \text{masse : } m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

* les protons : (p^+)

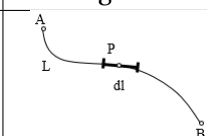
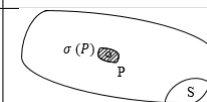
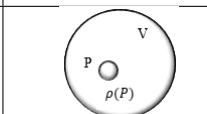
$$\text{charge : } q_p = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C,} \quad \text{masse : } m_p = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$$

ainsi que les ions et les porteurs de charge dans les semi-conducteurs qui peuvent être des électrons ou des « trous » (absence d'électrons).

On distingue :

- **les charges ponctuelles** : supposées sans dimension (similaire au point matériel en mécanique).
- **les distributions continues de charge** : hypothèse d'une charge élémentaire dq , où quelle on peut appliquer les formules établies dans une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution. On définit ainsi les densités (Voir Table 1.2) :

TABLEAU 1.1 – Type de distributions

Distributions	Formules	Figures
linéique	$\lambda = dq/dl \Rightarrow dq = \lambda dl$	
surfaique(surperficielle)	$\sigma = dq/dS \Rightarrow dq = \sigma dS$	
volumique	$\rho = dq/d\tau \Rightarrow dq = \rho d\tau$	

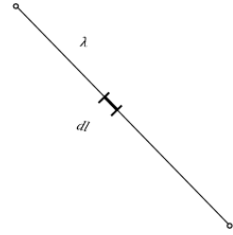
Application 1 :

Un fil de longueur $l = 50 \text{ cm}$ est chargé uniformément d'une charge $q = 1 \mu\text{C}$. Quelle est la densité linéique de charges λ portée par le fil.

La densité de la charge dq dans l'élément dl au point P est :

$$\lambda(p) = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda(p) dl \Rightarrow q = \int_0^l \lambda(p) dl$$

$$q = \lambda[l]_0^l = \lambda \times l \Rightarrow \lambda = \frac{q}{l} = \frac{10^{-6}}{50 \times 10^{-2}} = 2 \times 10^{-6} \left[\frac{C}{m} \right]$$



I.2. CHARGE PONCTUELLE

I.2.1. INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE

Expérience : Soit deux systèmes chargés électriquement, on observe deux types interactions s'exercent l'un sur l'autre :

- Les charges de même signe (+) (+) ou (-) (-) se repoussent (Fig. 1.1 (a)).
- Les charges de signes opposés (+) (-) ou (-) (+) s'attirent (Fig. 1.1 (b)).

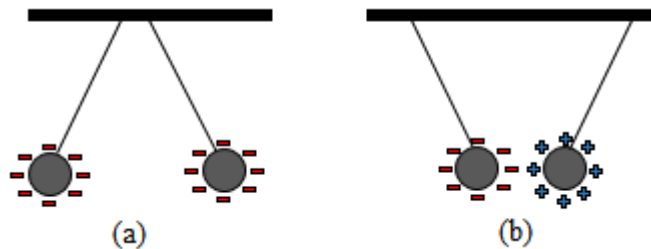


FIGURE 1.1 – Interaction électrique : (a) : répulsion, (b) : attraction

I.2.2. LOI DE COULOMB

Coulomb a effectué, en 1785, une série de mesures, pour déterminer les caractéristiques de la force d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles Q_1 et Q_2 séparées par une distance r . (Fig. 1.2) :

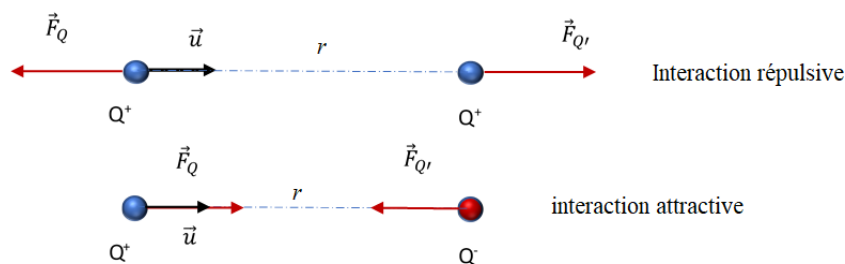


FIGURE 1.2 – Représentation vectorielle de la force électrostatique

- * Proportionnelle au produit des charges $Q_1 Q_2$.
- * Dirigé suivant la droite joignant les deux charges.
- * Inversement proportionnelle au carré de la distance r qui les sépare.
- * Lorsque les charges sont de même signe, le produit $Q_1 Q_2$ est positif et les forces d'interaction sont répulsives.
- * Lorsque les charges sont de signe opposé, le produit $Q_1 Q_2$ est négatif et les forces d'interaction sont attractives.

Dans les deux cas, en définissant un vecteur unitaire dirigé de Q_1 vers Q_2 , on peut exprimer la force exercée par Q_1 sur Q_2 sous la forme vectorielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad [N] \\ \vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \\ \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \quad \text{et} \quad \|\vec{F}_{1/2}\| = \|\vec{F}_{2/1}\| \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ SI} \\ \end{array} \right. \quad (1.1)$$

— k : est la constante de Coulomb ; ϵ_0 : est la permittivité du vide.

— Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles et dans le vide.

Principe de superposition

Considérons trois charges ponctuelles Q_1 , Q_2 et Q fixées en A, B et M respectivement (Fig. 1.3). L'expérience montre que la force exercée par Q_1 et Q_2 sur la charge Q est la somme vectorielle des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 .

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k \frac{Q Q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} + k \frac{Q Q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} \quad (1.2)$$

Il ya ainsi indépendance des effets. Ceci constitue le principe de superposition qui est vérifié quelque soit le nombre de charges en présence.

Pour n charges ponctuelles :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = kQ \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \quad (1.3)$$

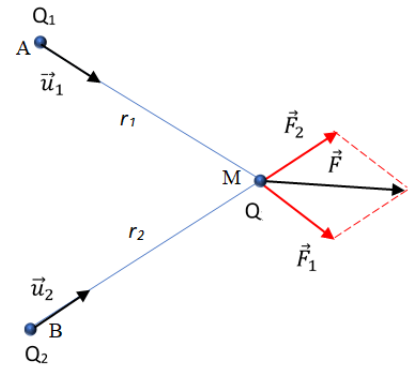
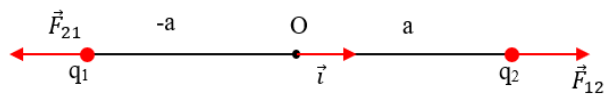


FIGURE 1.3 – Principe de superposition

Application 2 : Soient deux charges ponctuelles $q > 0$ identiques, placées en $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$ sur l'axe ox . Représenter sur un schéma le vecteur force agissant sur les deux charges. Détermine l'intensité forces répulsives.



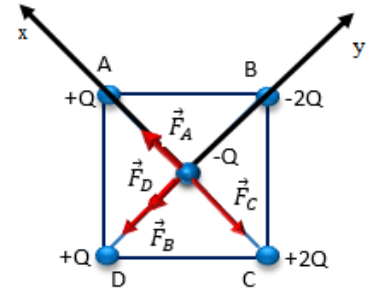
On a : $q_1 = q_2 = q$ et $r_{12} = r_{21} = 2a$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{12} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} \\ \vec{u}_{12} = \vec{i} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{F}_{12} = k \frac{q^2}{4 a^2} \vec{i} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \vec{u}_{21} \\ \vec{u}_{21} = -\vec{i} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{F}_{21} = -k \frac{q^2}{4 a^2} \vec{i} = -\vec{F}_{12}$$

Application 3 : quatre charges ponctuelles sont placées aux sommets d'un carré ABCD de côté $a = 2$ m, $q_A = Q$, $q_B = -2Q$, $q_C = 2Q$, $q_D = Q$ et $Q = 2 \times 10^{-8}$ C (voir la figure ci-dessous). Calculer la résultante des forces qui s'applique à la charge $(-Q)$ placée au centre du carré O.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_A = F_A \vec{i} \\ \vec{F}_B = -F_B \vec{j} \\ \vec{F}_C = -F_C \vec{i} \\ \vec{F}_D = -F_D \vec{j} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} F_A = k \frac{q_A q_O}{OA^2} = k \frac{Q^2}{OA^2} \\ F_B = k \frac{q_B q_O}{OB^2} = k \frac{2Q^2}{OB^2} \\ F_C = k \frac{q_C q_O}{OC^2} = k \frac{Q^2}{OC^2} \\ F_D = k \frac{q_D q_O}{OD^2} = k \frac{2Q^2}{OD^2} \end{array} \right.$$



On remarque que : $OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2 = r^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_A = k \frac{q_A q_O}{OA^2} = k \frac{2Q^2}{a^2} \\ F_B = k \frac{q_B q_O}{OB^2} = k \frac{4Q^2}{a^2} \\ F_C = k \frac{q_C q_O}{OC^2} = k \frac{4Q^2}{a^2} \\ F_D = k \frac{q_D q_O}{OD^2} = k \frac{2Q^2}{a^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_A = 2k \frac{Q^2}{a^2} \vec{i} \\ \vec{F}_B = -4k \frac{Q^2}{a^2} \vec{j} \\ \vec{F}_C = -4k \frac{Q^2}{a^2} \vec{i} \\ \vec{F}_D = -2k \frac{Q^2}{a^2} \vec{j} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{F} = (2k \frac{Q^2}{a^2} - 4k \frac{Q^2}{a^2}) \vec{i} + (-4k \frac{Q^2}{a^2} - 2k \frac{Q^2}{a^2}) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -2k \frac{Q^2}{a^2} \vec{i} - 6k \frac{Q^2}{a^2} \vec{j} = -2k \frac{Q^2}{a^2} (\vec{i} - 3\vec{j}) \Rightarrow \|\vec{F}\| = 2k \frac{Q^2}{a^2} \sqrt{1^2 + 3^2} = 2k \frac{Q^2}{a^2} \sqrt{10} \text{ C}$$

I.2.3. CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

Le champ électrostatique est une modification de l'espace, créée par la présence de charges électriques. Ce champ est centrifuge (convergent) ou centripète (divergent) si la charge Q positive ou négative (Voir la Fig. 1.4).

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \quad \left[\frac{N}{C} \right] \left[\frac{V}{m} \right] \quad (1.4)$$

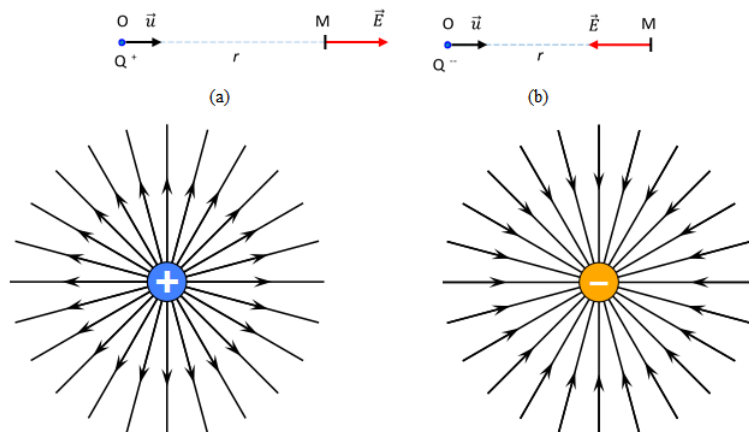


FIGURE 1.4 – Notation vectorielle du champ \vec{E}

1. Créé par une charge ponctuelle

On considère deux charges Q et Q_M placées en O et M respectivement. d'après la loi de Coulomb, la charge Q_M subit une force (Fig. 1.5) :

$$\vec{F} = k \frac{Q Q_M}{r^2} \vec{u} \quad (1.5)$$

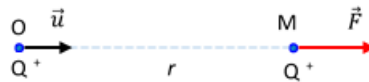


FIGURE 1.5 – La force électrique

De même si on suppose une autre charge Q'_M :

$$\vec{F}' = k \frac{Q Q'_M}{r^2} \vec{u} \quad (1.6)$$

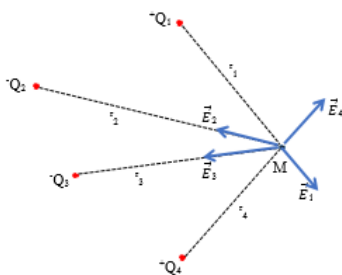
On déduit que la présence de la charge Q au point O modifie les propriétés de l'espace en créant un champ électrique :

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u} \quad (1.7)$$

La force de Coulomb qui s'exerce sur une charge quelconque Q_M placée en M peut alors s'écrire :

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q_M \quad [\text{N}] \quad (1.8)$$

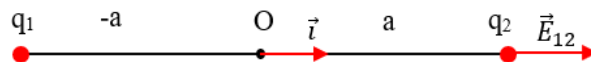
2. Distribution discrète de charges



Lorsque n charges ponctuelles existent simultanément en n points, le principe de superposition permet d'écrire le :

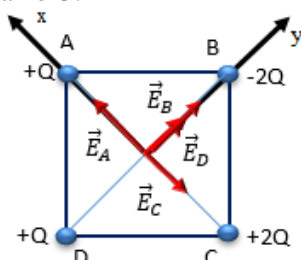
$$\vec{E} = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \quad (1.9)$$

Application 4 : Calculer le champ électrostatique créé par la charge q_1 au point (2) (Application 2).



$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(2) &= \vec{E}_{12} = K \frac{q_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} \\ \vec{F}_2 &= \vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}(2) \\ \vec{u}_{12} &= \vec{i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}(2) = k \frac{q_1}{4 a^2} \vec{i}$$

Application 5 : Calculer le champ électrostatique créé par les quatre charges (Application 3) au centre du carré O .



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

$$\text{Et : } \vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}_A = E_A \vec{i} \quad ; \quad \vec{E}_B = E_B \vec{j} \quad ; \quad \vec{E}_C = -E_C \vec{i} \quad ; \quad \vec{E}_D = E_D \vec{j}$$

On remarque que : $OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2 = r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

$$\begin{cases} E_A = k \frac{q_A}{OA^2} = k \frac{Q}{OA^2} \\ E_B = k \frac{q_B}{OB^2} = k \frac{2Q}{OB^2} \\ E_C = k \frac{q_C}{OC^2} = k \frac{Q}{OC^2} \\ E_D = k \frac{q_D}{OD^2} = k \frac{2Q}{OD^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_A = 2k \frac{Q}{a^2} \vec{i} \\ \vec{E}_B = 4k \frac{Q}{a^2} \vec{j} \\ \vec{E}_C = -4k \frac{Q}{a^2} \vec{i} \\ \vec{E}_D = 2k \frac{Q}{a^2} \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \left(2k \frac{Q}{a^2} - 4k \frac{Q}{a^2}\right) \vec{i} + \left(4k \frac{Q}{a^2} - 2k \frac{Q}{a^2}\right) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -2k \frac{Q}{a^2} \vec{i} + 6k \frac{Q}{a^2} \vec{j} = 2k \frac{Q}{a^2} (-\vec{i} + 3\vec{j}) \Rightarrow \|\vec{E}\| = 2k \frac{Q}{a^2} \sqrt{1^2 + 3^2} = 2k \frac{Q}{a^2} \sqrt{10} \text{ C}$$

1.2.4. POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

La charge électrique peut être décrite par un vecteur (champ électrique \vec{E}) ou par une grandeur scalaire (potentiel électrique V). On peut donc caractériser la perturbation du milieu due à la présence de charges électriques par une fonction scalaire : le potentiel V .

Le potentiel est lié au travail accompli pour transporter une charge d'un point à l'autre.
Le champ électrostatique n'existe que s'il y a une variation de potentiel entre deux points.

Champ électrique = variation du potentiel dans l'espace

Le champ électrique est dérivé d'un potentiel V :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \quad \left[\frac{V}{m} \right] \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

† Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

† Coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) \quad \text{Si } \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Coordonnées polaires}$$

† Coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \right)$$

1. Créé par une charge ponctuelle

Pour une charge ponctuelle Q_M en un point M distant r , le potentiel créé est donné par :

$$V = K \frac{Q}{r} + \text{Cste} \quad [V \equiv \text{Volt}] \quad (1.11)$$

Généralement V est nul à l'infin. Dans ce cas le potentiel s'écrit :

$$V = K \frac{Q}{r} \quad \text{Cste} = 0 \quad (1.12)$$

2. Potentiel créé par ensemble de charges

Le potentiel créé par n charges ponctuelles est la somme algébrique des potentiels créés par toutes les charges :

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = K \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \quad (1.13)$$

r_i : la distance qui sépare la charge du point d'étude M . Ce dernier étant nul à l'infini.

Application 6 : Calculer le potentiel électrostatique créé par les deux charge q_1 et q_2 au point (O) (Application 2).

$$\text{On a : } V(O) = V_1 + V_2 \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{l} V_1 = k \frac{q_1}{r_1} \text{ et } r_1 = a \\ V_2 = k \frac{q_2}{r_2} \text{ et } r_2 = a \end{array} \right\} \Rightarrow V(O) = \frac{k}{a} (q_1 + q_2) = 2 \frac{k q}{a}$$

Application 7 : Calculer le potentiel électrostatique créé par les quatres charges (Application 3) au centre du carré O.

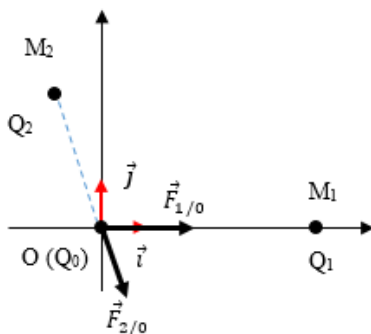
$$V = \sum_{i=1}^n V_i = V_A + V_B + V_C + V_D \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} V = k \frac{Q}{r} \\ OA = OB = OC = OD = \sqrt{r^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$$V_A = \sqrt{2} k \frac{Q}{a} ; V_B = -2\sqrt{2} k \frac{Q}{a} ; V_C = 2\sqrt{2} k \frac{Q}{a} ; V_D = \sqrt{2} k \frac{Q}{a}$$

$$\Rightarrow V = 2\sqrt{2} k \frac{Q}{a}$$

Application 8 : Dans un repère orthomormé (O, x, y) , on dispose trois charges électriques : $Q_0 = 1 \mu\text{C}$ au point $O(0,0)$, $Q_1 = -2 \mu\text{C}$ au point $M_1(5,0)$ et $Q_2 = 3 \mu\text{C}$ au point $M_2(-1,3)$. Les coordonnées sont exprimées en cm.

1. Calculer la force F s'exerçant sur la charge Q_0 placée en O.
 2. En déduire les composantes du vecteur champ électrique \vec{E} et son intensité E .
1. La force F qui s'exerce sur la charge Q_0 est la somme des forces F_1 et F_2 appliquée par les charges Q_1 et Q_2 respectivement :



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \vec{F}_1 = k \frac{Q_1 Q_0}{M_1 O^2} \vec{u}_{M_1 O} = k \frac{Q_1 Q_0}{M_1 O^3} \overrightarrow{M_1 O} \\ \vec{F}_2 = k \frac{Q_2 Q_0}{M_2 O^2} \vec{u}_{M_2 O} = k \frac{Q_2 Q_0}{M_2 O^3} \overrightarrow{M_2 O} \\ \vec{u}_{M_i O} = \frac{\overrightarrow{M_i O}}{M_i O} \end{array} \right.$$

Sachant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{M_1 O} = 5 \vec{i} \text{ [cm]} = 0.05 \vec{i} \text{ [m]} \Rightarrow \|\overrightarrow{M_1 O}\| = 0.05 \text{ [m]} \\ \overrightarrow{M_2 O} = (-\vec{i} + 3 \vec{j}) \text{ [cm]} = (-0.01 \vec{i} + 0.03 \vec{j}) \text{ [m]} \Rightarrow \|\overrightarrow{M_2 O}\| = \sqrt{(-0.01)^2 + 0.03^2} = 0.032 \text{ [m]} \end{array} \right.$$

On obtient :

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_0}{M_1 O^3} \vec{M_1 O} + k \frac{Q_2 Q_0}{M_2 O^3} \vec{M_2 O}$$

$$\vec{F} = 9 \times 10^9 \times \begin{cases} \frac{2 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{0.05^3} \times 0.05 - \frac{3 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{0.032^3} \times 0.01 \\ \frac{3 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{0.032^3} \times 0.03 \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = 15.74 \vec{i} - 25.62 \vec{j}$$

2. Composantes du vecteur champ électrique \vec{E} et son intensité E.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} = k \frac{Q_1}{M_1 O^3} \vec{M_1 O} + k \frac{Q_2}{M_2 O^3} \vec{M_2 O} = (1.575 \vec{i} - 2.562 \vec{j}) \times 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\Rightarrow \|\vec{E}\| = E = 10^7 \sqrt{1.575^2 + 2.562^2} = 3 \times 10^7 \left[\frac{N}{C} \right]$$

Application 9 :

Quatre charges ponctuelles +Q, +Q, +2Q et +2Q sont placées aux sommets d'un rectangle de longueur a et de largeur 2a.

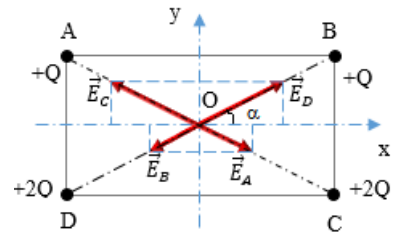
Déterminer le champ électrique \vec{E} au centre O du rectangle. Préciser la direction, le sens et la norme de $\|\vec{E}\|$. On place une charge q au centre O déduire la force électrostatique

Solution :

$$\vec{E}_T = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

Avec : $q_A = q_B = +Q$, $q_C = q_D = +2Q$ et $OA = OB = OC = OD$

$$\begin{cases} \text{Ox: } E_A = E_B = k \times \frac{q_A}{OA^2} \\ \text{Oy: } E_C = E_D = k \times \frac{q_C}{OA^2} \end{cases}$$



La projection sur les axes :

$$\begin{cases} \text{Ox: } E_x = (E_A - E_B - E_C + E_D) \cos \alpha = 0 \quad (\text{par symétrie}) \\ \text{Oy: } E_y = (-E_A - E_B + E_C + E_D) \sin \alpha = (-2E_A + 2E_C) \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ox: } E_x = 0 \quad (\text{par symétrie}) \\ \text{Oy: } E_y = \frac{KQ}{OA^2} \times [-2 + 2 \times 2] \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow E_T = E_y = \frac{2KQ}{OA^2} \sin \alpha$$

$$\begin{cases} OA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{4}\right) = \frac{(a^2+b^2)}{4} \\ \sin \alpha = \frac{\frac{b}{2}}{OA} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_T = \frac{2KQ}{\frac{(a^2+b^2)}{4}} \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{8KQb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \vec{E}_T = \frac{8KQb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{j} \end{cases}$$

I.3. DISTRIBUTIONS CONTINUES

I.3.1 ELEMENTS DE LONGUER, DE SURFACE, DE VOLUME

1. Coordonnées cartésiennes

Un point M quelconque de l'espace peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans la base associée ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) (Fig. 1.6 (b)); s'écrit comme :

$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (1.14)$$

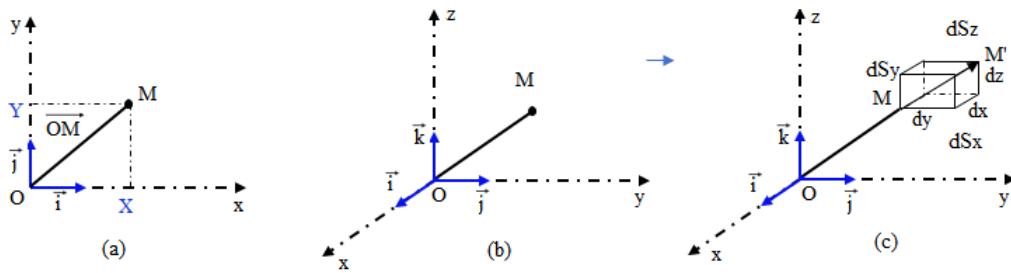


FIGURE 1.6 – Repère dans un plan (a), dans l'espace (b) et déplacement et volume élémentaires (c)

Le déplacement du point M(x,y,z) au point M'(x+dx, y+dy, z+dz) (Fig. 1.6 (C)), est décrit :

Elément de longueur	$\vec{MM}' = d\vec{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \Rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'axe Ox : } d\vec{l} = dx \vec{i} \\ \text{plan (xOy) : } d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} \\ \text{l'espace : } d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{array} \right.$
Elément de surface	$dS = 2(dx dy + dy dz + dx dz) \Rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} dS_x = dx dy, \text{ Plan (xOy)} \\ dS_y = dy dz, \text{ Plan (yOz)} \\ dS_z = dz dx, \text{ Plan (zOx)} \end{array} \right.$
Elément de volume		$d\tau = dx dy dz$

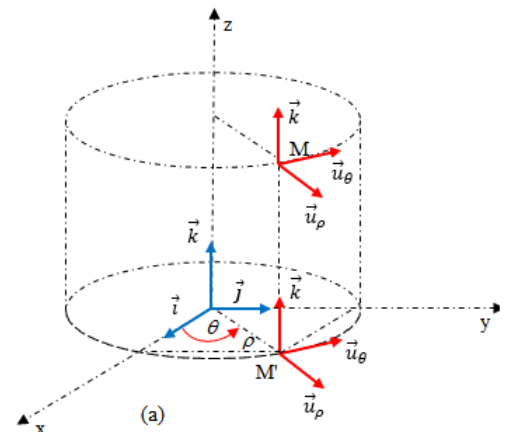
\vec{MM}' (diagonale principale) est un élément du vecteur de déplacement $d\vec{OM}$ ou $d\vec{l}$.

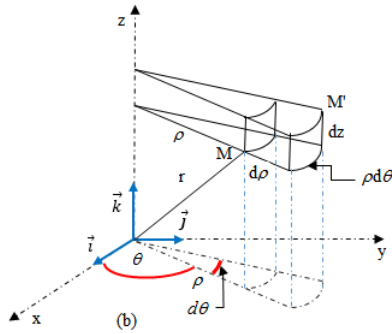
2. Coordonnées cylindriques

Un point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques ρ, θ et z dans la base associée au repère cylindrique ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k}$) (Fig. 2 (a)), d'écrit le vecteur position :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k} \quad (1.15)$$

\vec{MM}' (Fig. 2 (b)) est un élément du vecteur de déplacement du point M(ρ, θ, z) au point M'($\rho + d\rho, \theta + d\theta, z + dz$) noté $d\vec{OM}$. Avec $\rho \geq 0$, θ est entre $[0, 2\pi]$.





Elément de longueur	$d\vec{OM} = \vec{MM}' = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$
Elément de surface	$\begin{cases} dS_\rho = \rho d\theta dz, & \text{Si on fixe le rayon } \rho \\ dS_\theta = d\rho dz, & \text{Si l'angle } \theta \text{ est fixe} \\ dS_z = d\rho \rho d\theta, & \text{Si on fixe le côté } z \end{cases}$
Elément de volume	$d\tau = d\rho \rho d\theta dz = \rho d\rho d\theta dz$

3. Cas particulier (Coordonnées polaires)

Les coordonnées polaires (Fig. 1.7) est un cas particulier des coordonnées cylindriques, où la cote $z = 0 \Rightarrow dz = 0$. Dans le plan (Oxy) , le point M est repéré par une distance ρ et un angle θ ($0 \leq \rho \leq +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$). On peut alors écrire :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho \quad (1.16)$$

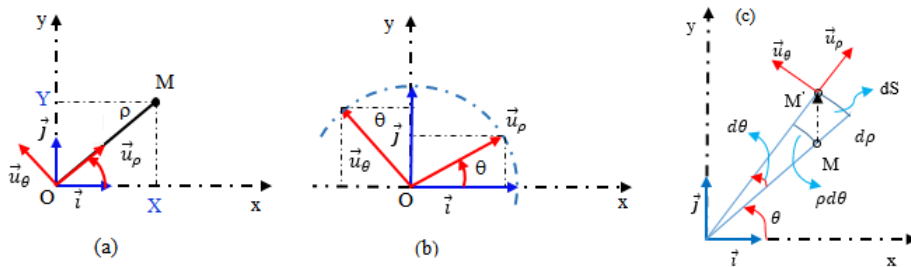


FIGURE 1.7 – Coordonnées polaires (ρ, θ, z) et la base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, z)$

Elément de longueur	$\vec{MM}' = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta$
Elément de surface	$dS = \rho d\rho d\theta dz$

Application 10 :

- Calculer la surface d'un cercle de centre O et de rayon R en coordonnées polaires.
- Calculer le volume d'un cylindre V de rayon R et de hauteur H .
- Dans le plan (ρ, θ) , on peut montrer que l'élément de surface dS est un petit carré tangent au cercle de dimensions longitudinales $d\rho$ suivant \vec{u}_ρ et $\rho d\theta$ suivant l'axe transversal \vec{u}_θ en coordonnées polaires, finalement :

$$S = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = R^2 \pi \quad [\text{SI}]$$

- L'élément de volume est un petit cube de coordonnées $d\rho, \rho d\theta, dz$:

$$d\tau = d\rho \cdot \rho d\theta \cdot dz \Rightarrow v = \iiint \rho d\rho \cdot d\theta \cdot dz = \int_0^R \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz$$

$$\Rightarrow v = \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^R \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [z]_0^H = \pi R^2 H \quad [\text{SI}]$$

4. Coordonnées sphériques

Un point M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées sphériques r , θ et φ dans la base associée au repère sphériques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ (Fig. 1.8). On peut alors écrire :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r \quad (1.17)$$

avec $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

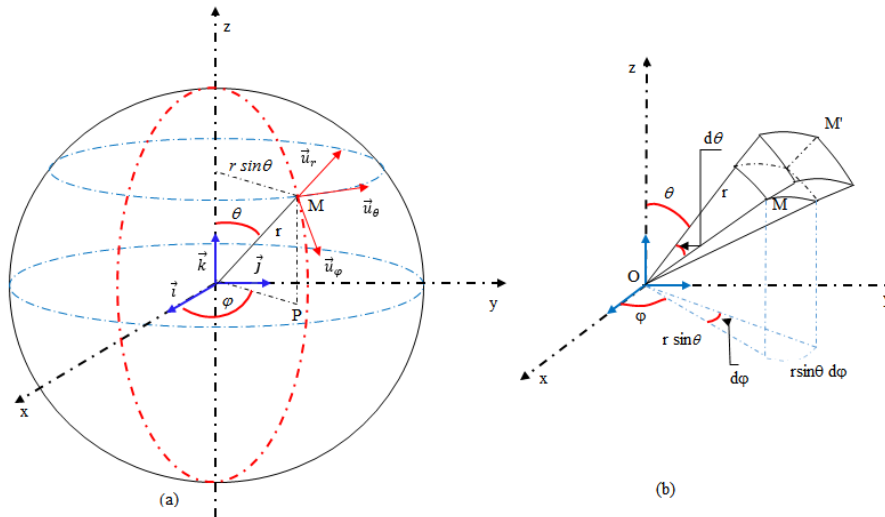


FIGURE 1.8 – Coordonnées sphériques (r, θ, φ) et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

Le déplacement du point $M(r, \theta, \varphi)$ au $M'(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$. D'écrire :

Élément de longueur	$d\vec{OM} = \vec{MM}' = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$
Élément de surface	$\left\{ \begin{array}{l} dS = r d\theta r \sin\theta d\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \text{ si on fixe } r \\ dS = r \sin\theta d\varphi dr, \text{ si on fixe } \theta \text{ v} \\ dS = r dr d\theta, \text{ si on fixe } \varphi \end{array} \right.$
Élément de volume	$d\tau = dr r d\theta r \sin\theta d\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Application 11 :

Calculer le volume d'une sphère v de rayon R . Intégrale triple de volume :

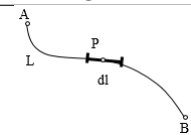
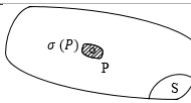
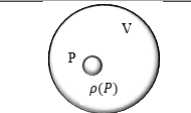
$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned} v &= \iiint r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot [-\cos\theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \\ &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot [-\cos\theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3} (1 + 1)(2\pi) = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

I.3.2 Distributions continues de charge :

hypothèse d'une charge élémentaire dq , où quelle on peut appliquer les formules établies dans une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution. On définit ainsi les densités (Voir Table 1.2) :

TABLEAU 1.2 – Type de distributions

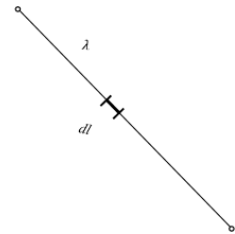
Distributions	Formules	Figures
linéique	$\lambda = dq/dl \Rightarrow dq = \lambda dl$	
surfaique(surperficielle)	$\sigma = dq/dS \Rightarrow dq = \sigma dS$	
volumique	$\rho = dq/d\tau \Rightarrow dq = \rho d\tau$	

Application 12 : Un fil de longueur $l = 50\text{ cm}$ est chargé uniformément d'une charge $q = 1\mu\text{C}$. Quelle est la densité linéique de charges λ portée par le fil.

La densité de la charge dq dans l'élément dl au point P est :

$$\lambda(p) = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda(p) dl \Rightarrow q = \int_0^l \lambda(p) dl$$

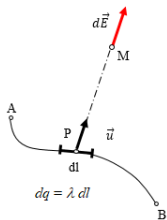
$$q = \lambda[l]_0^l = \lambda \times l \Rightarrow \lambda = \frac{q}{l} = \frac{10^{-6}}{50 \times 10^{-2}} = 2 \times 10^{-6} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}} \right]$$



I.3.3 Champ électriques créés par des distributions continues

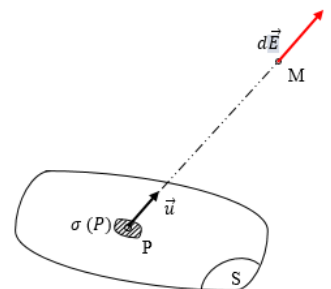
Dans le cas de ces distributions continues, chaque portion de ligne, surface ou volume portant la charge dq crée un champ élémentaire $d\vec{E}$. Pour obtenir le champ électrique total en un point M, il faut sommer (de façon continue) ces champs élémentaires sur l'ensemble de la ligne, de la surface ou du volume. Ainsi, on a recourt à des intégrales :

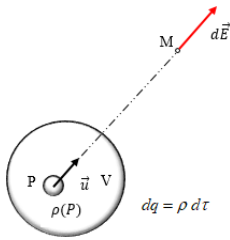
Remarque : Ces relations sont très générales et ne sont pas utilisables directement. Il convient d'abord d'analyser les symétries de la distribution de charges pour simplifier les calculs.



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P) dl}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P) dl}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} \quad (1.18)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) dS}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) dS}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} \quad (1.19)$$





$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{P})}{r^2} d\tau \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{P})}{\|\vec{\mathbf{PM}}\|^3} d\tau \vec{\mathbf{PM}} \quad (1.20)$$

I.3.4 Potentiel Créés par des distributions continues

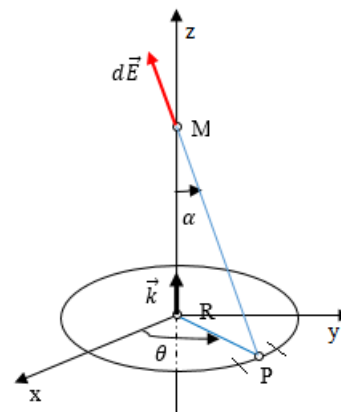
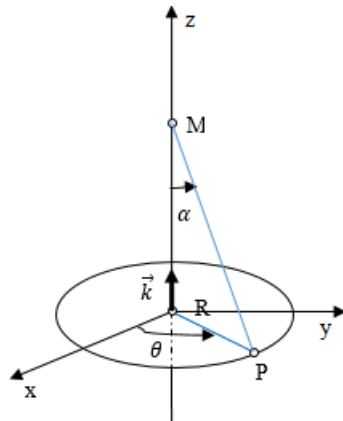
$$\text{Distribution linéique } V(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\mathbf{P})}{r} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\mathbf{P})}{\|\vec{\mathbf{PM}}\|} dl \quad (1.21)$$

$$\text{Distribution surfacique } V(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{P})}{r} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{P})}{\|\vec{\mathbf{PM}}\|} dS \quad (1.22)$$

$$\text{Distribution volumique } V(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{P})}{r} d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{P})}{\|\vec{\mathbf{PM}}\|} d\tau \quad (1.23)$$

Application 13 : Soit une boucle circulaire de centre O, de rayon R, uniformément chargée avec une densité linéique $\lambda_0 = \lambda$. Calculer le champ crée par cette distribution de charges, en un point M de l'axe de la boucle :

1. A partir du potentiel électrostatique.
2. Directement.



1. Le champ électrostatique à partir du potentiel :

Le potentiel $dV(\mathbf{M})$ créé en un point $\mathbf{M}(0, 0, z)$ par la charge $dq = \lambda dl$ portée par un élément dl de la boucle entourant P est :

La charge $dq = \lambda dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le potentiel $V(\mathbf{M})$:

$$dV(\mathbf{M}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{\mathbf{PM}}\|} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl}{\|\vec{\mathbf{PM}}\|}$$

$$\text{avec } dl = R d\theta \text{ et } \|\vec{\mathbf{PM}}\| = \sqrt{R^2 + Z^2}$$

Le potentiel $V(M)$ est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle :

$$\begin{aligned} V(M) &= \oint_C dV(M) = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + Z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + Z^2}} [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + Z^2}} = V(0, 0, Z) = V(0, 0, -Z) \quad \left[\frac{V}{m} \right] \end{aligned}$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dz} = -\frac{\lambda_0 R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} = \vec{E}(0, 0, z) = -\vec{E}(0, 0, -z) \quad \left[\frac{N}{C} \right]$$

2. Direct le champ en un point M :

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\vec{z}'z$. Tout plan contenant l'axe $\vec{z}'z$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ E en un point de l'axe $\vec{z}'z$ est porté par \vec{k} :

La charge $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M la champ $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = E_z \vec{k}$$

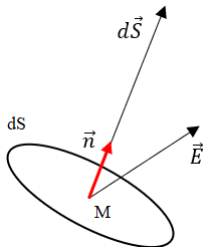
Le champ \vec{E} étant porté par \vec{K} , seule la composante $d\vec{E}_z$ est à considérer :

$$d\vec{E}_z = dE_z \vec{k} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM} \vec{k}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{R^2 + z^2} \cos\alpha}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{avec} \quad \cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\vec{E}(M) = 2 \int_0^\pi dE_z \vec{k} = 2 \frac{\lambda_0 R z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\theta = \frac{\lambda_0 R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \left[\frac{N}{C} \right]$$

I.3.5 FLUX DU CHAMP ÉLECTRIQUE

I.3.5.1 Définition



Par définition, le flux du champ électrostatique \vec{E} à travers une surface (S) , noté $\phi_s(\vec{E})$ est la quantité scalaire définie comme :

$$\phi_s(\vec{E}) = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.24)$$

Si la surface est fermée, le flux s'écrit :

$$\phi_s = \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) \quad [V.m] \quad (1.25)$$

I.3.5.2 Flux du champ créé par une charge ponctuelle

Calcul du flux, à travers une surface (S) quelconque, du champ $E(M)$ créé par une charge ponctuelle placée en un point O.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad d\phi = \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \vec{n} \cdot \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\phi_{(S)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d\Omega \Rightarrow \phi_{(S)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (1.26)$$

Conséquences :

- * Le flux de \vec{E} ne dépend que de l'angle solide sous lequel est vue la surface.
- * Le flux de \vec{E} est indépendant de la distance surface-source : dS augmente en r^2 mais de \vec{E} diminue en $1/r^2$.

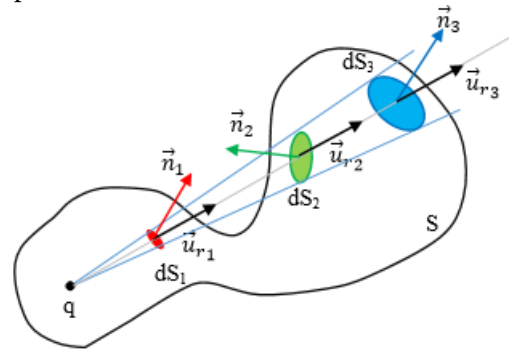
I.3.5.3 Flux sortant d'une surface fermée

Soit S une surface fermée. Soit q une charge ponctuelle placée en un point O ; cette charge se trouve soit à l'intérieur de S soit à l'extérieur. Nous nous proposons dans les deux cas, de calculer le flux de \vec{E} créé par la charge q , sortant de S.

a) Charge située à l'intérieur de S

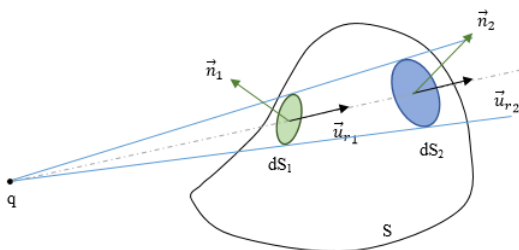
Dans ce cas, du point O où se trouve la charge q , on voit la surface S sous l'angle solide, cette intégrale correspond à l'angle solide $\Omega = \int d\Omega = 4\pi$ sous lequel on voit l'espace tout entier.

$$\begin{aligned} \Phi &= \int (d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (d\Omega_1 - d\Omega_2 + d\Omega_3) \end{aligned}$$



$$\text{d'où} \quad \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{4\pi q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.27)$$

b) Charge située à l'extérieur de S



Si la charge q se trouve à l'extérieur de S, un cône élémentaire issu de la charge coupe un nombre pair de fois la surface, les flux élémentaires correspondants sont :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int (d\Phi_1 + d\Phi_2) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (-d\Omega_1 + d\Omega_2) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \Phi = 0 \quad (1.28)$$

I.3.6 THÉORÈME DE GAUSS

I.3.6.1 Enoncé

Le flux du champ électrostatique, créé par une distribution de charges, à travers une surface quelconque (S) fermée, est égal à la somme algébrique des charges présentes à l'intérieur de (S) divisée par ϵ_0 :

$$\phi(S) = \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} dS(M) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \quad (1.29)$$

$\vec{E}(M)$ est le champ électrostatique créé par toute la distribution de charges (comprise dans le volume délimité par la surface (S)) aux points M de la surface (S). $dS(M)$ est un élément de surface pris autour de M.

I.3.6.2 Conditions d'applications du théorème de Gauss

Le théorème est utilisé au calcul du champ dans le cas de symétrie très élevée. Pour cela le choix de la surface (S) doit satisfaire aux conditions suivantes :

1. La forme de (S), simple et facile à calculer.
2. L'orientation du champ électrostatique E sur (S), connue.
3. Le module du champ E sur (S), constant.

Dans le cas général. on calcule le champ E par ses formules de définition ou bien on calcule le potentiel et on le déduit.

Application 14 :

Soit une charge ponctuelle Q, Positive, placée en un point O. A partir du théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique au point P.

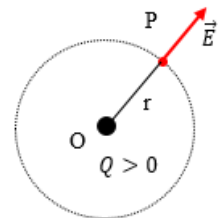
Soit (S) une sphère centrée en O et de rayon $OP = r$. Q la crée en P un champ électrique E qui, par raison de symétrie, possède le même module en tout point de la sphère. D'après le théorème de Gauss :

$$\phi(S) = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int}$$

Tandis que : $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ et $\vec{E} = C^{st}$

$$\phi(S) = \iint_{(S)} E dS = E \iint_{(S)} dS = E 4\pi r^2$$

$$\begin{cases} \phi = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \\ \sum Q_{int} = Q \end{cases} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



application 15 :

Soient deux sphères concentriques de centre O de rayons R_1 et R_2 respectivement tel que $R_1 < R_2$ (Figure ci-dessous).

1. En utilisant le théorème de GAUSS : Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace pour une distribution volumique de charge répartie uniformément entre ces deux sphères.
2. Déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace.

1. Le champ électrostatique en tout point de l'espace :

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\phi(S) = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \Rightarrow E_{SG} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

◆ $0 < r < R_1$

La première sphère de Gauss de rayon r , on a :

$$\begin{cases} E_1 S_G = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \\ S_G = 4 \pi r^2 \\ \sum Q_{int} = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0 S_G} = 0 \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

◆ $R_1 < r < R_2$

Pour la deuxième sphère de Gauss de rayon r , on trouve que :

$$\begin{cases} E_2 S_G = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \\ S_G = 4 \pi r^2 \\ \sum Q_{int} = \iiint_V \rho d\tau = 4 \pi \rho \int_{R_1}^r r^2 dr = 4 \pi \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_1}^r = \frac{4}{3} \pi \rho [r^3 - R_1^3] \end{cases} \Rightarrow$$

$$E_2 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0 S_G} = \frac{\frac{4}{3} \pi \rho (r^3 - R_1^3)}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_2 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \\ \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \vec{e}_r \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

◆ $r > R_2$

La troisième sphère de Gauss de rayon r , on a :

$$\begin{cases} E_3 S_G = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_{int} \\ S_G = 4 \pi r^2 \\ \sum Q_{int} = \iiint_V \rho d\tau = 4 \pi \rho \int_{R_2}^{R_1} r^2 dr = \frac{4}{3} \pi \rho [R_2^3 - R_1^3] \end{cases}$$

Alors :

$$E_3 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0 S_G} = \frac{\frac{4}{3} \pi \rho (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_3 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} \right) \\ \vec{E}_3 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} \right) \vec{e}_r \end{cases} \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

2. Dédurre le potentiel électrique en tout point de l'espace :

La relation champ-potential donne en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi\right)$$

Vu les symétries du champ $E_\theta = E_\varphi = 0$ donc : $V(r, \theta, \varphi) = V(r)$ et $E = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V(r) = \int dV = -\int E dr$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } 0 < r < R_1 : \quad V_1(r) = -\int E_1 dr = C_1 \\ \text{pour } R_1 < r < R_2 : \quad V_2(r) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int \left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right) dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right) + C_2 \\ \text{pour } r > R_2 : \quad V_3(r) = -\frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_3 \end{array} \right.$$

La référence de potentiel ne peut pas être prise à l'infini, puisqu'il y existe des charges. On choisit ce $V(r \rightarrow \infty) = 0$ qui donne :

$$V_3(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{\infty} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow V_3(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r}$$

$$V_2(R_2) = V_1(R_2) \Rightarrow \frac{\rho R_2^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 R_2} = C_2 - \frac{\rho R_2^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 R_2}$$

$$\Rightarrow C_2 = -2 \frac{\rho R_2^2}{3\epsilon_0} \Rightarrow V_2(r) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} + 2R_2^2 \right]$$

$$V_1(R_1) = V_2(R_1) \Rightarrow -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1} + 2R_2^2 \right] = C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{3R_1^2}{2} + 2R_2^2 \right] \Rightarrow V_1(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} [3R_1^2 + 4R_2^2]$$