TD 1 P1 (F211) Rappels Mathématiques

EXERCICE 1 :

$$\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}\ ;\ \vec{B} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\ \ et\ \ \vec{C} = 4\vec{\imath} - 3\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$$

1. Le module :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{C}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

2. Les composantes et les modules des vecteurs :

$$\vec{V} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \qquad \text{et} \qquad \vec{W} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$$

$$\vec{V} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (2 + 3 + 4)\vec{\imath} + (3 - 2 - 3)\vec{\jmath} + (-1 + 2 + 3)\vec{k}$$

$$\vec{V} = 9\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{V}\| = \sqrt{9^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{101}$$

$$\vec{W} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = (2 + 3 - 4)\vec{\imath} + (3 - 2 + 3)\vec{\jmath} + (-1 + 2 - 3)\vec{k}$$

$$\vec{W} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{W}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

3. Le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur :

$$\vec{F} = \vec{A} + 2\vec{B}$$

$$\vec{F} = \|\vec{F}\|\vec{u}_A \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_A = \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|}$$

$$\vec{F} = (2 + 6)\vec{\imath} + (3 - 4)\vec{\jmath} + (-1 + 4)\vec{k} = 8\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{F}\| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{74}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}_A = \frac{8}{\sqrt{74}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{74}}\vec{\jmath} + \frac{3}{\sqrt{74}}\vec{k}$$

4. Les produits scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

- Le produit scalaire :

$$\vec{A}.\vec{B} = xx' + yy' + zz' = 6 - 6 - 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B} = -2$$

- Le produit vectoriel :

$$\vec{A}.\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - zy')\vec{\imath} - (xz' - x'z)\vec{\jmath} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (3(2) - (-1)(-2))\vec{\imath} - (2(2) - 3(-1))\vec{\jmath} + (2(-2) - 3(3))\vec{k}$$

$$\Rightarrow \ \vec{A}.\vec{B} = 4\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - 13\vec{k}$$

5. L'angle $(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$:

Le produit scalaire :

$$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) \ \Rightarrow \ \cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \ \left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) \ = cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{17}}\right) = 97.45°$$

EXERCICE 2 : A(2, 1), B(1, 1) et C(1, 2)

1) Les coordonnées polaires (r, θ) de ces trois points :

En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$A \begin{cases} r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 26.56° \end{cases} \Rightarrow A(\sqrt{5}, 26.56°)$$

$$B \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{1}{1}\right) = 45° \end{cases} \Rightarrow B(\sqrt{2}, 45°)$$

$$C \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{2}{1}\right) = 63.43° \end{cases} \Rightarrow C(\sqrt{5}, 63.43°)$$

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$

- En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\vec{\imath} + (1-1)\vec{\jmath} = -\vec{\imath}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-2)\vec{\imath} + (2-1)\vec{\jmath} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{BC} = (1-1)\vec{\imath} + (2-1)\vec{\jmath} = \vec{\jmath}$$

- En coordonnées polaires.

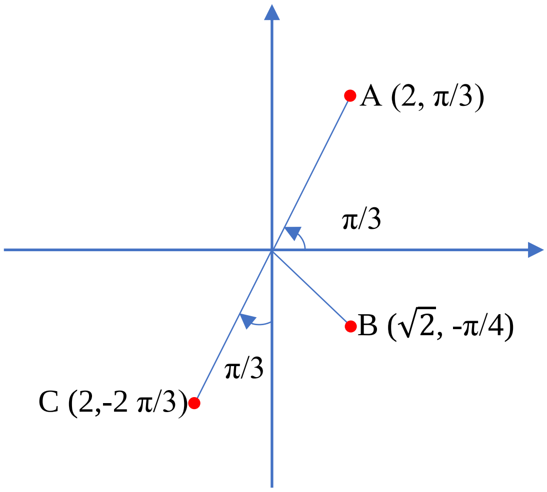
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} r = 1 \\ \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{0}{-1}\right) = 180° = \pi\, rad \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} r = \sqrt{2} \\ \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{1}{-1}\right) = 135° = \dfrac{3\pi}{4}\, rad \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} r = 1 \\ \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{1}{0}\right) = 90° = \dfrac{\pi}{2}\, rad \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3 :

- Représenter des points polaires suivants : A (2, π/3) ; B (√2, -π/4) ; C (2, -2π/3).



- Les coordonnées cartésiennes

Coordonnées polaires	Coordonnées cartésiennes
A (2, π/3)	$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \\ y = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{A}\,(1, \sqrt{3})$
B (√2, -π/4)	$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ y = \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{B}\,(1, -1)$
C (2, -2π/3)	$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos\left(-2\frac{\pi}{3}\right) = -1 \\ y = 2\sin\left(-2\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{A}\,(-1, -\sqrt{3})$

EXERCICE 4 :

$$M_1\,(1,1,1)\ ;\ M_2(2,2,1)\ ;\ M_3\,(2,1,0)$$

a) Trouver l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{M_2M_1}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{M_2M_3}}$

$$\overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{M_2M_3} = \left\|\overrightarrow{M_2M_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{M_2M_3}\right\|.\cos\alpha \text{ tel que } \alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{M_2M_1},\overrightarrow{M_2M_3}}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{M_2M_3}}{\left\|\overrightarrow{M_2M_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{M_2M_3}\right\|}$$

$$\overrightarrow{M_2M_1} = ??$$

$$\overrightarrow{M_2M_1} = (1-2)\vec{\imath} + (1-2)\vec{\jmath} + (1-1)\vec{k} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{M_2M_1} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} \text{ et } \left\|\overrightarrow{M_2M_1}\right\| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = (2-2)\vec{\imath} + (1-2)\vec{\jmath} + (0-1)\vec{k} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{M_2M_1} = -\vec{\jmath} - \vec{k} \text{ et } \left\|\overrightarrow{M_2M_3}\right\| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{M_2M_3} = (-\vec{\imath} - \vec{\jmath}).\left(-\vec{\jmath} - \vec{k}\right) = +1$$

Alors :

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \alpha = 60°$$

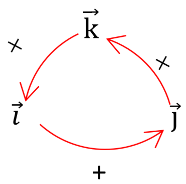
b/ évaluer les vecteurs suivants : $\vec{i} \wedge \vec{j}\ ;\ \vec{j} \wedge \vec{k}\ ;\ \vec{k} \wedge \vec{j}\ ;\ \vec{k} \wedge \vec{i}\ ;\ \vec{j} \wedge \vec{j}\ ;\ \vec{k} \wedge \vec{k}\ ;\ \vec{j} \wedge 4\,\vec{k}$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$



$$\vec{j} \wedge \vec{j} = \|\vec{j}\|.\|\vec{j}\|.\sin\left(\widehat{\vec{j},\vec{j}}\right) = 1.1.\underbrace{\sin 0}_{=0} = 0$$

$$\vec{k} \wedge \vec{k} = \left\|\vec{k}\right\|.\left\|\vec{k}\right\|.\sin\left(\widehat{\vec{k},\vec{k}}\right) = 1.1.\underbrace{\sin 0}_{=0} = 0$$

$$\vec{j} \wedge 4\vec{k} = (1.4)\left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right) = 4\vec{i}$$