TD 2 P1 (F211) – CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE 1/

$$\begin{cases} x = 2cos(t^2 + 3t + 2) \rightarrow (1) \\ y = 2sin(t^2 + 3t + 2) \rightarrow (2) \end{cases}$$

1) Donner l'équation de la trajectoire, quelle est sa nature ?

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4cos^2(t^2 + 3t + 2) + 4sin^2(t^2 + 3t + 2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4\underbrace{[cos^2(t^2 + 3t + 2) + sin^2(t^2 + 3t + 2)]}_{=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 4}$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $c(0,0)$ et de rayon $R = 2\ m$

2) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$, donner son module.?

On a : $\overrightarrow{OM} = 2cos(t^2 + 3t + 2)\vec{\imath} + 2sin(t^2 + 3t + 2)\vec{\jmath}$

Alors:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}[2cos(t^2 + 3t + 2)]\vec{\imath} + \frac{d}{dt}[2sin(t^2 + 3t + 2)]\vec{\jmath}$$

$$= -(4t + 6)sin(t^2 + 3t + 2)\vec{\imath} + (4t + 6)cos(t^2 + 3t + 2)\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{v} = (4t + 6)[-sin(t^2 + 3t + 2)\vec{\imath} + cos(t^2 + 3t + 2)\vec{\jmath}]}$$

Son module v

$$\|\vec{v}\| = v = |(4t + 6)|\sqrt{\underbrace{[sin^2(t^2 + 3t + 2) + cos^2(t^2 + 3t + 2)]}_{=1}}$$

$$\boxed{v = 4t + 6\ (m/s)}$$

Vecteur accélération $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[-(4t + 6)sin(t^2 + 3t + 2)]\vec{\imath} + \frac{d}{dt}[(4t + 6)cos(t^2 + 3t + 2)]\vec{\jmath}$$

$$= [-4sin(t^2 + 3t + 2) - (4t + 6)(2t + 3)cos(t^2 + 3t + 2)]\vec{\imath} + [4cos(t^2 + 3t + 2) - (4t + 6)(2t + 3)\sin(t^2 + 3t + 2)]\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{a} = [-4sin(t^2 + 3t + 2) - 2(2t + 3)^2cos(t^2 + 3t + 2)]\vec{\imath} + [4cos(t^2 + 3t + 2) - 2(2t + 3)^2\sin(t^2 + 3t + 2)]\vec{\jmath}}$$

Son module a

$$\|\vec{a}\| = a$$

$$= \sqrt{16\underbrace{[sin^2(t^2 + 3t + 2) + cos^2(t^2 + 3t + 2)]}_{=1} + 4(2t + 3)^4\underbrace{[cos^2(t^2 + 3t + 2) + sin^2(t^2 + 3t + 2)]}_{=1}}$$

$$\boxed{a = \sqrt{16 + 4(2t + 3)^4}(m/s^2)}$$

3) Donner les coordonnées polaires du point M ?

On sait que

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\ m \\ \tan\theta = \dfrac{2sin\ (t^2 + 3t + 2)}{2cos\ (t^2 + 3t + 2)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} r = 2\ m \\ \theta = t^2 + 3t + 2 \end{cases}}$$

4) Donner le vecteur position, vitesse et accélération en coordonnées polaires ?

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = t^2 + 3t + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 2t + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{r} = 0 \\ \ddot{\theta} = 2 \end{cases}$$

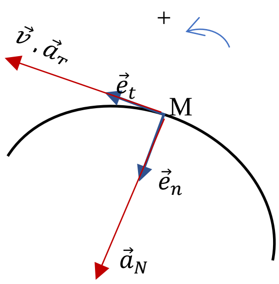
$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{e_r}}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\ \vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = 2(2t + 3)\vec{e}_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = -2(2t + 3)^2\vec{e}_r + 4\vec{e}_\theta}$$

EXERCICE 2/

$\vec{r} = 3\cos 2t\,\vec{\imath} + 3\sin 2t\,\vec{\jmath} + (8t - 4)\vec{k}$



Trouver un vecteur unitaire tangent à la courbe.

Le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la courbe (la trajectoire).
Le vecteur unitaire qui est tangent à la courbe est un vecteur porté par le vecteur vitesse. Noter que le vecteur unitaire en question est le vecteur tangentiel $\vec{e}_t$, donc :

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{v} = -6\sin 2t\,\vec{\imath} + 6\cos 2t\,\vec{\jmath} + 8\vec{k}$$

$$v = \sqrt{(-6\sin 2t)^2 + (6\cos 2t)^2 + (+8)^2} = \sqrt{36(\sin^2 2t + \cos^2 2t) + 64} = 10\ (m/s)$$

$$\vec{e}_t = \frac{-6\sin 2t\,\vec{\imath} + 6\cos 2t\,\vec{\jmath} + 8\vec{k}}{10} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{e}_t = -0{,}6\sin 2t\,\vec{\imath} + 0{,}6\cos 2t\,\vec{\jmath} + 0{,}8\vec{k}}$$

EXERCICE 3/

$$\begin{cases} r = \frac{t^2}{4} \\ \theta = \frac{\pi}{4} t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{r} = \frac{t}{2} \\ \dot{\theta} = \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{r} = \frac{1}{2} \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

1/ exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{t^2}{4}\overrightarrow{e_r}}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = \frac{t}{2}\vec{e}_r + \frac{\pi}{16}t^2\vec{e}_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{64}t^2\right)\vec{e}_r + \frac{\pi}{4}t\vec{e}_\theta}$$

2/ calculer le module du vecteur vitesse et accélération à t=6s.

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{16}t^2\right)^2}$$

$$v(t = 6s) = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{16}(6)^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t = 6s) = 7{,}68\ (m/s)}$$

$$a(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{64}t^2\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}t\right)^2}$$

$$a(t = 6s) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{64}(6)^2\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}(6)\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a(t = 6s) = 6{,}91\ \ (m/s^2)}$$

3/ donner les coordonnées cartésiennes du point M.

On a :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = \frac{t^2}{4}\cos\frac{\pi}{4}t \\ y = \frac{t^2}{4}\sin\frac{\pi}{4}t \end{cases}}$$

4/ en déduire l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{4}\cos\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{16}t^2\sin\frac{\pi}{4}t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{4}\sin\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{16}t^2\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \left(\frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{16}t^2\sin\frac{\pi}{4}t\right)\vec{\imath} + \left(\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{16}t^2\cos\frac{\pi}{4}t\right)\vec{\jmath}}$$

TD 2 P1 (F211) (Cinématique du point matériel) Semaine2

Exercice 1 :

$$\vec{V} = 2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}\ ,\ \text{A}\ \ t = 0\text{s} \Rightarrow \text{M}\,(0,3)$$

1 Le module de la vitesse :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\text{v}_\text{x}^2 + \text{v}_y^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2 Le vecteur accélération $\vec{a}$ et son module :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}) = 2\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a}\| = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3 Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{OM} = \int \vec{V}\, dt \ \Rightarrow\ \begin{cases} x = \int \text{v}_x dx \\ y = \int \text{v}_y dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \int 2\, dx \\ y = \int 2t\, dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t + C_1 \\ y = t^2 + C_2 \end{cases}$$

A $t = 0\text{s} \Rightarrow \text{M}\,(0,3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 2(0) + C_1 \\ 3 = (0)^2 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 + 3 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = 2t\vec{\imath} + (t^2 + 3)\vec{\jmath}$$

4 L'équation de la trajectoire :

On a :

$$\begin{cases} x = 2t \Rightarrow t = \dfrac{x}{2} \\ y = t^2 + 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + 3\ (\text{m})$$

5 Les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération et le rayon de courbure de courbure pour t=1s.

- L'accélération tangentielle pour t=1s :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{4 + 4t^2}\right) = \frac{8t}{2\sqrt{4 + 4t^2}} \Rightarrow a_T = \frac{4t}{2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{à t} = 1\text{s} \Rightarrow a_T = \frac{2}{\sqrt{2}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- L'accélération normale pour t=1s :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow\ a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 4 - \frac{4t^2}{1+t^2} = \frac{4+4t^2-4t^2}{1+t^2}$$

$$a_N^2 = \frac{4}{1+t^2}\ \Rightarrow\ a_N = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\quad ,\qquad \text{à t} = 1\text{s} \Rightarrow a_N = \frac{2}{\sqrt{2}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Le rayon de courbure de courbure pour t=1s.

$$a_N = \frac{V^2}{R}\ \Rightarrow\ R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{4(1+t^2)}{\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}} = 2(1+t^2)\sqrt{1+t^2} = 2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$R = 2(1+t^2)^{\frac{3}{2}},\qquad \text{à t} = 1\text{s} \Rightarrow R = 2(1+1^2)^{\frac{3}{2}} = 5.656\ \text{m}$$

Exercice 2 :

$$\begin{cases} y = x^2 = 4t^2 \\ x = 2t \end{cases}$$

- La vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \text{ et } \overrightarrow{OM} = 2t\,\vec{\imath} + 4t^2\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = 2\,\vec{\imath} + 8t\,\vec{\jmath} \Rightarrow \|\vec{V}\| = \sqrt{2^2 + (8t)^2} = \sqrt{4 + 64t^2} = 2\sqrt{1 + 16t^2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

- L'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 8\vec{\jmath} \Rightarrow \|\vec{a}\| = 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- L'accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{4 + 64t^2}\right) = \frac{2(64)t}{2\sqrt{4 + 64t^2}} \Rightarrow a_T = \frac{64t}{\sqrt{4 + 64t^2}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- L'accélération normale :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 8^2 - \frac{(64t)^2}{4 + 64t^2} = \frac{64 \times 4 + 64 \times 64t^2 - (64t)^2}{4 + 64t^2}$$

$$a_N^2 = \frac{64 \times 4}{4 + 64t^2} = \frac{64}{1 + 16t^2} \Rightarrow a_N = \frac{8}{\sqrt{1 + 16t^2}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- Le rayon de courbure de la trajectoire :

$$a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{2(1 + 16t^2)}{\frac{8}{\sqrt{1 + 16t^2}}} = \frac{(1 + 16t^2)\sqrt{1 + 16t^2}}{4}$$

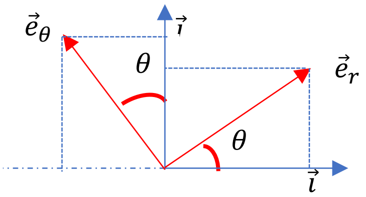
$$\Rightarrow R = \frac{(1 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}}{4}\ \mathrm{m}$$

Exercice 3 :

$$\begin{cases} r(t) = e^{t} \\ \theta(t) = t \end{cases} \qquad (\text{t en s, r en mètre et } \theta \text{ en rad})$$

1. $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en fonction de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Par projection on obtient :



$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

2. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires.

En coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = e^{t}\vec{e}_r$

3. Le vecteur vitesse $\vec{V}$ et son module :

- Le vecteur vitesse $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \implies \begin{cases} \dot{r} = e^{t} \\ \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{cases} \quad et \ \ \dot{\theta} = 1 \quad \implies \vec{V} = e^{t}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$$

- Le Module : $\|\vec{V}\| = e^{t}\sqrt{1^2 + 1^2} = e^{t}\sqrt{2}$

4. Le vecteur accélération $\vec{a}$ et son module

- Le vecteur accélération $\vec{a}$: $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

$$\implies \begin{cases} \ddot{r} = e^{t} \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases} \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = 0 \implies \vec{a} = (e^{t} - e^{t})\vec{e}_r + 2e^{t}\vec{e}_\theta = 2e^{t}\vec{e}_\theta$$

- Le Module : $\|\vec{a}\| = \sqrt{(2e^{t})^2} = 2e^{t}$

1. Déduire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cartésiennes.

On a: $\begin{cases} x = r\cos\theta = e^{t}\cos t \\ y = r\sin\theta = e^{t}\sin t \end{cases} \implies \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = e^{t}(\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath})$