Les filtres

Systèmes linéaires : Un système linéaire est régi par une équation différentielle linéaire. cette équation différentielle contient des termes différentiels (du 1er et 2ème ordre etc...) mais ne contient pas de termes élevés à une puissance (carré, puissance trois, etc...).

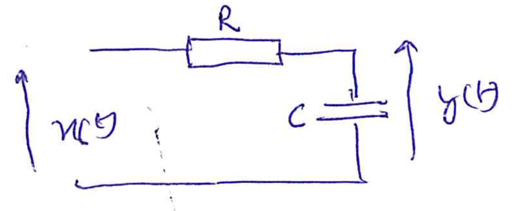
Rq: l'équation différentielle ~~est~~ s'applique à n'importe quel type d'évolution alors que la fonction de transfert se limite aux grandeurs dont l'évolution est sinusoïdale dans le temps et pour lesquelles ont peut définir une fréquence.

Un système linéaire est caractérisé par des paramètres

- le gain statique K (pour $f=0$)
- Constante de temps τ et $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ = pulsation propre (f1)

évidemment chaque type de systèmes possèdent ses propres signaux (ou paramètres) d'entrée et de sortie (voir p2)

ex :



$$x(t) = y(t) + RC\frac{dy}{dt}$$

La relation entre x(t) et y(t) est décrite par une équation différentielle du 1er ordre. (fR)

en général un système linéaire est ~~décrit~~ décrit par une éq. diff

$$a_0 y(t) + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + \dots a_N\frac{d^Ny}{dt^N} = b_0\frac{x(t)}{dt} + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \dots a_M\frac{d^Mx(t)}{dt^M}$$

$\sum_{k=0} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{i=0} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$

Un système invariant dans le temps est un système dont les caractéristiques de comportement ne se modifie pas dans le temps c.à.d sa sortie ne dépend pas de l'instant ou on applique le signal d'entrée. f9

pour $x(t) \longrightarrow y(t)$

$x(t-\tau) \longrightarrow y(t-\tau)$

ex : ① système invariant : $\begin{cases} y(t) = a\,x(t) \\ y(t-\tau) = a\,x(t-\tau) \end{cases}$

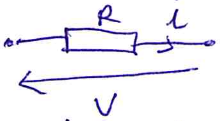
② système variant : $\begin{cases} y(t) = x(t)\sin(t) \\ y(t-\tau) = x(t-\tau)\sin(t-\tau) \\ \qquad \neq x(t-\tau)\sin(t) \end{cases}$

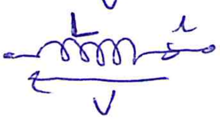
Un système peut être donc :

- électrique : circuit électrique, moteur
- électronique : capteur, amplificateur, filtre
- Automatique : Régulateur
- Télécommunication : Modulateur, démodulateur, Canal de transmission
- Mécanique : ressort, pendule, Moteur mécanique.
- organique : Cellule
- politique
- économique.

f11

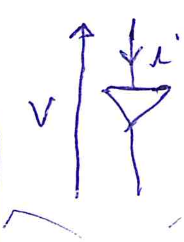
exemples de systèmes électriques :

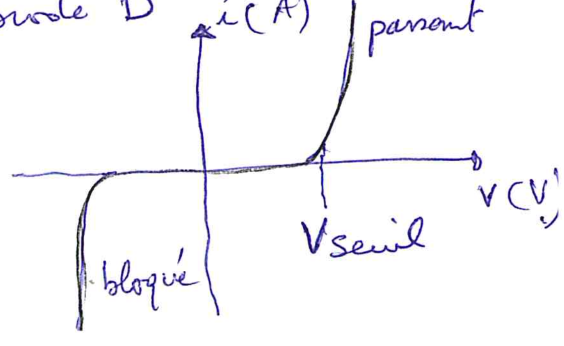
ⓐ •  $i = \frac{V}{R}$

ⓑ •  $i = L\frac{di}{dt}$

ⓒ •  $i = C\frac{dV}{dt}$

ⓓ Diode D





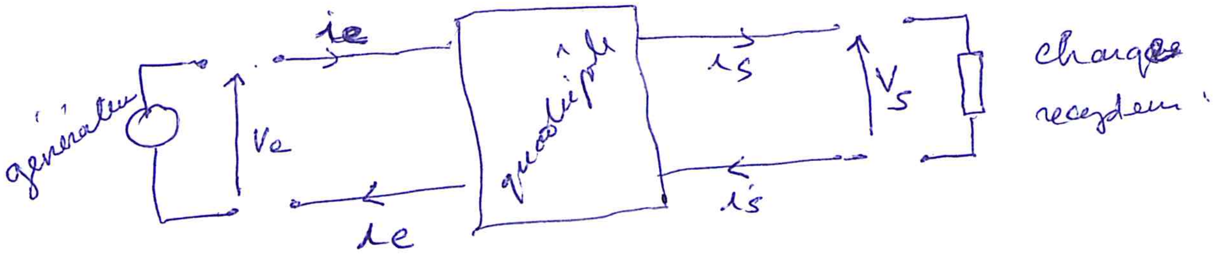
<u>filtre</u> : Un filtre est un système linéaire invariant dans le temps.

ou encore est un quadripôle (élément à quatre bornes)

V_e et V_s : tensions d'entrée et de sortie.

i_e et i_s : courants d'entrée et de sortie

Un quadripôle est dit linéaire lorsqu'il est constitué uniquement de dipôles et éléments de circuits linéaires



- on s'intéresse uniquement à la fonction de transfert en tension (puisque, le quadripôle en a plusieurs ...).

<u>filtrage</u> : Pour des raisons multiples, l'information utile peut être dissimulée au sein d'un signal complexe. l'extraction du spectre de l'information est possible par l'intermédiaire d'un filtrage.

Le filtrage en fréquence fut historiquement l'une des premières fonctions utilisées en radioélectricité.

<u>le filtre</u> : est un circuit électronique qui réalise une opération de traitement du signal. Il permet de sélectionner une bande ~~passante~~ de fréquence. La plupart des systèmes comportent des filtres en grande quantité.

les filtres sont utilisés dans :

- Systèmes de télécommunications (téléphone, télévision, radio, transmission de données, etc)
- Systèmes d'acquisitions et de traitement de signaux
f 8 physiques (surveillance médicale, Mesures, radars..)
- alimentation electrique ..

Il existe plusieurs type de filtres.
Les plus connus sont : filtre passe-bas, filtre passe-haut, filtre passe-bande, filtre coupe bande (rejecteur de bande)

un filtre idéal permet de transmettre sans distortion une partie du spectre (bande passante) et bloque toutes les autres parties avec un passage abrupt (discontinuité entre
f 13 les deux parties).

Le filtre idéal (discontinuité dans sa fonction de transfert) n'est pas réalisable (Système non causal) Voir (f.13)

on peut aussi classer les filtres en deux familles: analogiques et numeriques.

- filtres numériques : sont réalisés à partir des circuits intégrés programmables. Ils sont plus performants (DSP)..
Ils sont utilisés à des fréquences (jusqu'à 1MHz).

- filtre analogiques : on constate aussi deux types de filtres (5) (6) (7) (8)

- filtres passifs : ils sont constitués des éléments de base.

f2 (résistance, condensateurs, inductances). Ils sont actuellement utilisés pour les hauts fréquences : leur gain ne peut accéder un 1. Ils atténuent les signaux mais pas les amplifient. Ils sont rarement sujet de problèmes de saturation. (Ils sont utilisés dans les enceintes des haut-parleurs). Ils peuvent exister dans toutes les gammes de fréquences (utilisé en radio HF)
attention : le choix de la fréquence dépend de la bobine et du condensateur

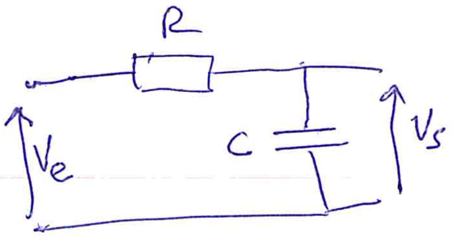
- les filtres actifs : Ils comportent en plus des élément de base, des composants actifs comme les transistors ou Amplificateur opérationnels (AOP) et particulièrement (AIL). Les filtres actifs sont moins encombrants, facile à concevoir et moins couteux que les filtres passifs mais ils sont limités
f2 en fréquence à cause de l'utilisation de l'AIL.
En plus, ils consomment plus et nécessitent une alimentation

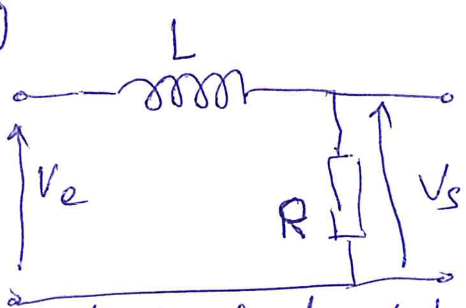
- Il y a aussi un autre type de filtres apparu début des années 80 qui sont les filtres à capacité commutée. (voir f2).

- pour la fonction de transfert d'un filtre :
  - degré du dénominateur doit être supérieur ou égal au degré du numérateur
  - L'ordre d'un filtre est donné par le degré du du dénominateur
  - La fonction de transfert d'un filtre peut être décomposée comme le produit de fonctions de transfert du 1er et 2ème ordre.

Filtre passe-bas : Bande passante $[0, f_c]$

1er ordre





Les filtres passe-bas sont les filtres dont la fonction de transfert est de la forme :

$$\frac{V_s}{V_e} = H(j\omega) = \boxed{\frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}} = H(\omega)$$

$$|H(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$, $\omega_c = \frac{1}{RC}$ ou $\omega_c = \frac{R}{L}$

H_0 = gain statique

$H_0 = 1$

Représentation dans le plan Bode

Diagramme de Bode : Consiste à tracer les graphs du gain en G_{dB} ~~et de phase~~ de la phase $\varphi(\omega)$ c.à.d en fonction de $\boxed{\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$.

autrement dit ; on préfère représenter la réponse du filtre par le gain en dB $|H|_{dB} = 20\log_{10}|H|$ avec une échelle logarithmique pour l'axe des fréquences.

La fréquence de coupure correspond alors à une chute du gain de : $\boxed{3dB}$. Car par définition, la fréquence de coupure est la fréquence $(\omega=\omega_c)$ pour laquelle le gain est égal à : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\rightarrow |H|_{dB} = 20\log|H| = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -20\log 2^{\frac{1}{2}}$

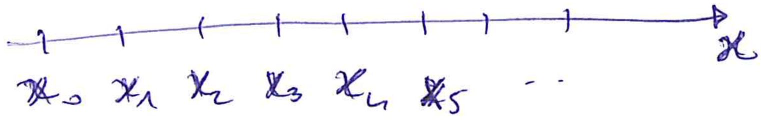
$= -10\log 2 = 10 \times 0{,}3$ $\boxed{= 3dB}$

avec $H_0 = 1$

C'est quoi l'échelle logarithmique ?

soit :

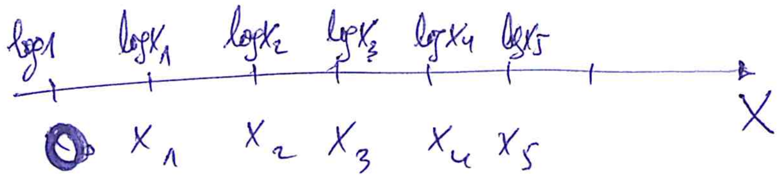
~~Soit~~ Axe linéaire



unité : $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \ldots = cte$

échelle : Δx = une unité de longueur (ex : $\Delta x = 1\,cm$ v...)

Axe logarithmique



unité : $\Delta X = X_1 - 0 = X_2 - X_1 = X_3 - X_2 = \ldots = cte$

$\Delta X = \log X_2 - \log X_1 = \log X_3 - \log X_2 = \ldots = cte$

rapport : $\Delta X = \log \frac{X_2}{X_1} = \log \frac{X_3}{X_2} = \ldots = cte$

$\Delta X = \log r$

$r = 2$: une octave

$r = 10$: une décade

échelle : $r = 10 \Rightarrow \Delta X = \log 10$: une unité de longueur

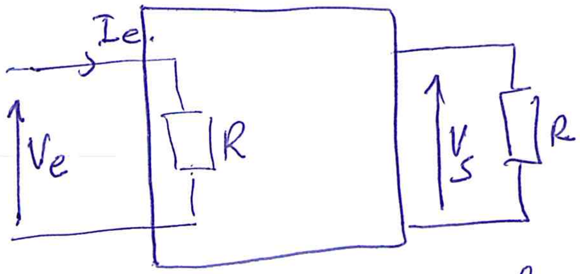
$r = 2 \Rightarrow \Delta X = \log 2$: unité de longueur.

Une décade est l'interval de la fréquence Δf entre une fréquence et une autre fréquence qui est dix fois plus grande ou dix fois plus petite que cette fréquence.

Sur une échelle logarithmique, la longueur (en cm) d'une octave est donc égale à 0.3 fois la longueur d'une décade. Réciproquement, la longueur d'une décade est égale à $\frac{1}{0{,}3} \simeq 3{,}3$ fois la longueur d'une octave (voir f

un octave : est l'interval de fréquence Δf entre une fréquence et le double (ou la moitié) de cette fréquence. Ne pas confondre octave et harmonique qui est le double de la fréquence.

Décibels : on considère le quadripôle suivant



Soit P_s = Puissance fournie à la charge. R.

P_e = puissance à l'entrée

le gain en puissance : $A = \frac{P_s}{P_e}$ mesuré en échelle linéaire

on definit de même le gain en puissance mesuré en échelle logarithmique : $G = \log A$,

Pour $P_s = 10\, P_e$ → on calcule $G = \log 10 = 1$ Bel $= 10$ décibels (dB)

d'où $G_{dB} = 10 \log \frac{P_s}{P_e}$. c'à.d $G_{dB} = 10\,G = 10 \log \frac{P_s}{P_e} = 10 \log 10$

$P_e = \frac{V_e^2}{R}$ et $P_s = \frac{V_s^2}{R} \Rightarrow \frac{P_s}{P_e} = \left(\frac{V_s}{V_e}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{G_{dB} = 20 \log \frac{V_s}{V_e}}$

les axes des ordonnés sont linéaires (dB ou degré (°))
l'axe des abscisses est logarithmique gradué en pulsation $\left(\frac{rad}{s}\right)$ ou en frequence (Hz).

Un Bel (en l'honneur de A. Graham Bell) est un rapport de puissance d'un facteur de 10.

Un decibel (dB) est un rapport de puissance de 100

dB : unité inventé par Bell pour aider à mesurer la possibilité des personnes à entendre.