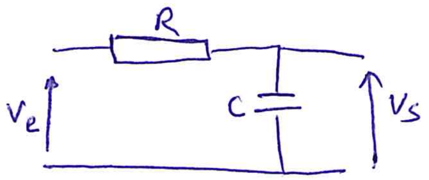
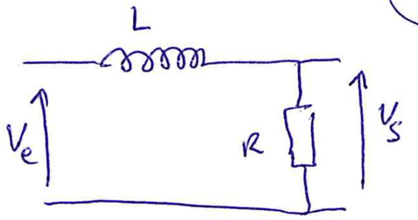
étude d'un filtre passe bas 1^{er} ordre





$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1/jC\omega}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + RjC\omega}.$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \omega_c = \frac{R}{L}.$$

La forme générale : $\boxed{H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}}$

$$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}, \quad H_{dB} = 20\log(H_0) - 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$

$$\varphi(\omega) = \arg\{H(j\omega)\} = \arg\{H_0\} - \arg\left\{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right\} = \operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_c}.$$
$$= -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

étude assymptotique :

- pour $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$ ($\omega < \frac{\omega_c}{10}$) $\rightarrow \frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow 0.$, $|H(j\omega)| = H_0$ et $H_{dB} = 20\log(H_0) - \underbrace{10\log 1}_{0}$

$H_{dB} = 20\log(H_0) \Rightarrow$ le gain est une assymptote $y_1(\omega) = 20\log(H_0)$

$\varphi(\omega) = 0$

- Pour $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$ ($\omega > 10\omega_c$), $\frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow \infty \xrightarrow{\text{on neglige le 1}} H(j\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{(\omega/\omega_c)^2}} = \frac{H_0\omega_c}{\omega} \Rightarrow H_{dB} = 20\log H_0\omega_c - 20\log\omega$

$\Rightarrow$ le gain ~~est~~ une assymptote $y_2(\omega) = 20\log H_0\omega_c - 20\log\omega$

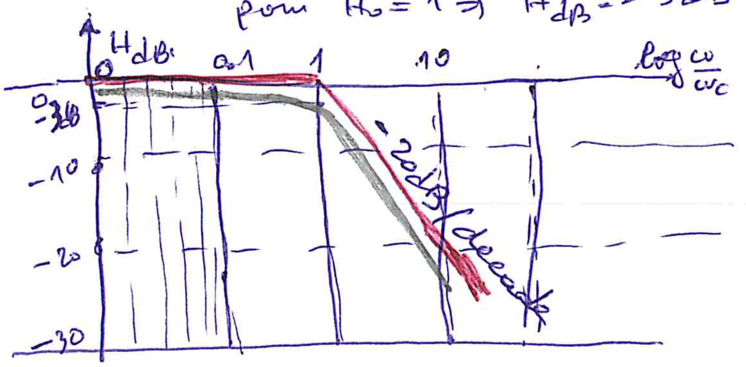
$$\varphi(\omega) = \arg\left\{\frac{H_0\omega_c}{j\omega}\right\} = \arg\left\{-j\frac{H_0\omega_c}{\omega}\right\} = -\arg\left(j\frac{H_0\omega_c}{\omega}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

- pour $\omega = \omega_c$ (points particuliers du diagramme).

$|H(j\omega)| = H_0/\sqrt{2} \Rightarrow H_{dB} = 20\log(H_0) - 20\log\sqrt{2} = 20\log(H_0) - 3dB$

et $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_c} = -\operatorname{arctg}1 = -\frac{\pi}{4}$

pour $H_0 = 1 \Rightarrow H_{dB} = -3dB$



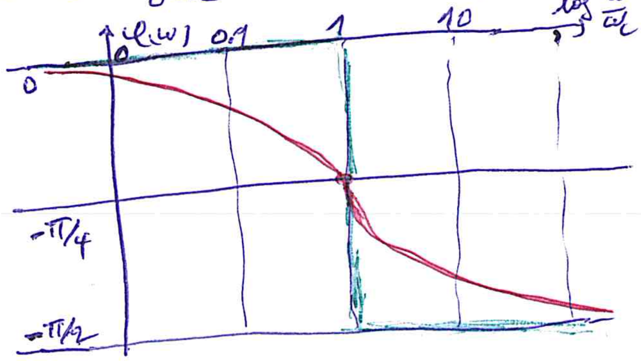
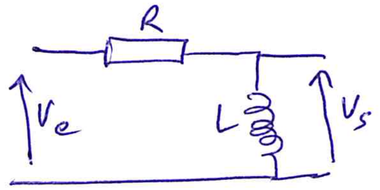
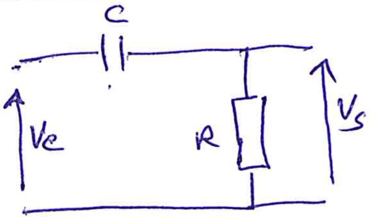


diagramme assymptotique et réel du filtre passe bas 1^{er} ordre

étude d'un filtre passe haut 1ᵉʳ ordre





$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1+j\frac{L}{R}\omega} \quad , \quad H(j\omega) = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

$\omega_c = \frac{L}{R}$, $\omega_c = \frac{1}{RC}$

La forme générale : $H(j\omega) = H_0 \dfrac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$, H_0 = gain statique = gain à très basse fréquence lorsqu'il n'y a pas d'oscillation

L'étude assymptotique (la même)

$$H(j\omega) = H_0 \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} \cdot \frac{\times j\frac{\omega_c}{\omega}}{\times j\frac{\omega_c}{\omega}} \longrightarrow H(j\omega) = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega_c}{\omega}}$$

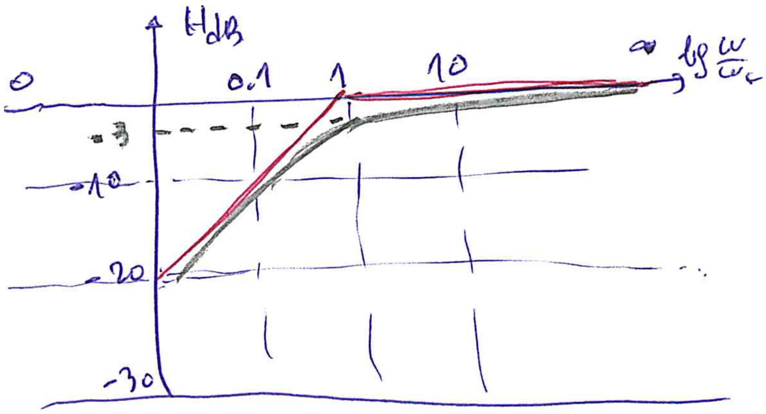
$$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg\{H(j\omega)\} = \arg(H_0) - \arg\left\{1+j\frac{\omega_c}{\omega}\right\}$$

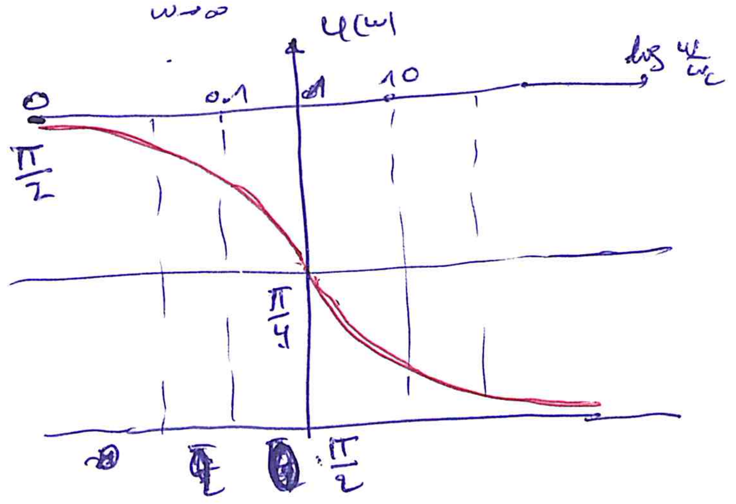
$\varphi(\omega) =$

$$H_{dB} = 20\log(H_0) - 10\log\left\{\left(1+\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right\} = \cancel{\ldots}$$

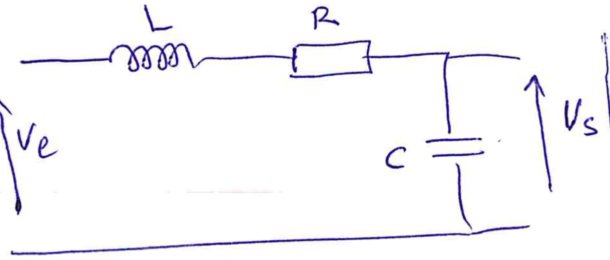
- Pour $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1 \Rightarrow$ ($\omega \to 0$)
$$\begin{cases} H_{dB} = -20\log\frac{\omega_c}{\omega} = 20\log\frac{\omega}{\omega_c} \\ \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad \text{car} \quad \underset{\omega\to 0}{\arctan}\frac{\omega_c}{\omega} = \arctan \infty = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Pour $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$ ($\omega \to \infty$) $\Rightarrow$
$$\begin{cases} H_{dB} = 20\log(H_0) = 0 \quad H_0 = 1 \\ \varphi(\omega) = 0 \quad \text{car} \quad \underset{\omega\to\infty}{\arctan}\frac{\omega_c}{\omega} = \arctan 0 = 0 \end{cases}$$





étude d'1 filtre passe bas 2ème ordre



$$H = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega - L^2C^2\omega^2}$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\omega_0 \neq RC$, ω_0 dépend de L et C ~~qui est responsable~~

La forme canonique de H

$$H = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad , \boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}} , \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

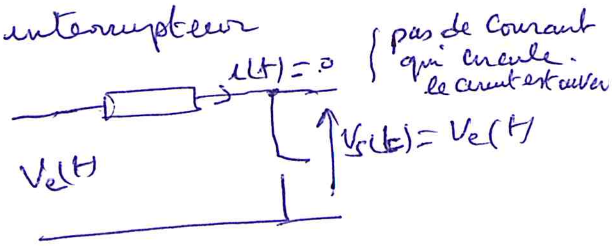
$H_0 = 1$ $\qquad RC\omega = \frac{x}{Q}$

Q = facteur de qualité

$$\boxed{Q = \frac{1}{RC\omega} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{RC}\sqrt{LC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

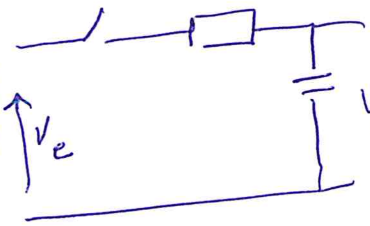
Rqs :

① Pour les basses fréquences (BF) la bobine est un fil et la capacité se comporte comme interrupteur



$$H = \frac{V_s}{V_e} = 1$$

② pour les hautes fréquences (HF) l'impédance de L est infinie ($jL\omega$) se comporte comme interrupteur :



$$H = \frac{V_s}{V_e} = 0$$

- basses fréquences : $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \to \frac{\omega}{\omega_0} \to 0 \to x \to 0 \Rightarrow H \sim 1 \Rightarrow |H| = 1$
- hautes fréquences : $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \to \frac{\omega}{\omega_0} \to \infty \to x \to \infty \Rightarrow H \sim \frac{1}{-x^2} \Rightarrow |H| \to 0$

BF : $H_{dB} = 20 \log|H| = 20 \log 1 = 0$

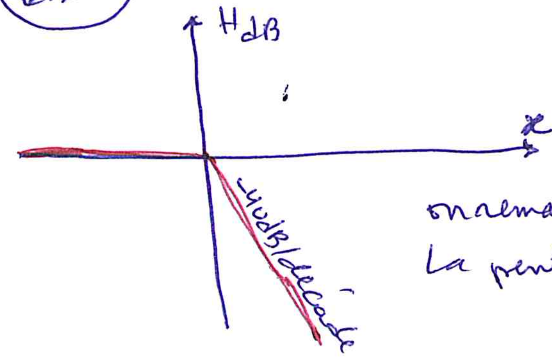
HF : $H_{dB} = 20 \log|H| = 20 \log \frac{1}{x^2} = 20(\log 1 - \log x^2) = 0 - 40 \log x = -40 \log x$

L'argument $\varphi(\omega)$: BF : $\varphi(\omega) = \arg\{\cancel{H}\} = \arg(1) = 0\ [2\pi] = \arg\{H\}$

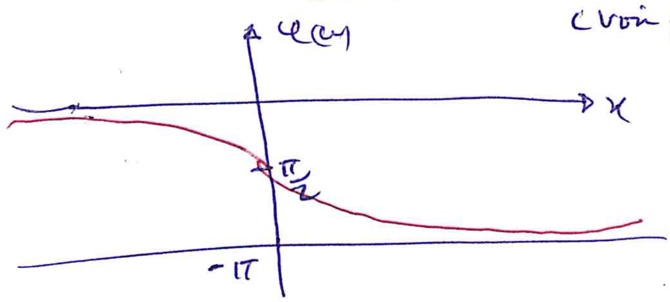
HF : $\varphi(\omega) = \arg\left\{-\frac{1}{x^2}\right\} = \pm\pi$ $\qquad \underline{\cos(-x) = \cos x}$

dans notre cas $\varphi = -\pi$ (voir p. 17)

~~[illegible]~~ $\underline{\omega = \omega_c}$



on a remarque que la pente est -40 2ème ordre



étude de H en fonction de Q :

pour $x = 1 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1$ $|H| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2) + \frac{x^2}{Q^2}}}$ avec $H = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$

il y a deux comportements du filtre passe bas du 2ème ordre

pour $x = 1 \Rightarrow H = \frac{1}{j\frac{1}{Q}} = \frac{Q}{j} = -jQ \Rightarrow |H| = Q$

donc si Q ↗ on peut avoir une resonnance.

C'est à dire la valeur de Q au pt $\omega = \omega_0$ dépend d'autres valeurs par exemple celle de C et L etc

donc le gain max n'est pas obligatoirement égal à 1 (cas des filtres passifs).

on remarque que Q le facteur de qualité peut détériorer la capacité si Q↗ ?

on cherche les valeurs de Q à la résonnance ($x = 1$)

à la résonnance c'est un extremum, donc il faut dériver $|H| \Rightarrow$ La dérivée de $|H|$ est la dérivée d'une fraction. Elle donne :

(on dérive par rapport x signifie qu'on dérive par rapport à ω)

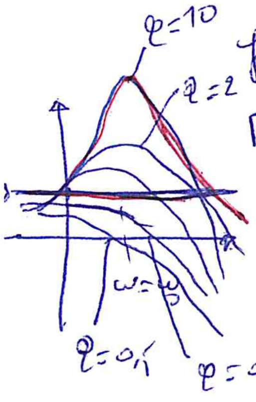
$2x\left(\frac{1}{Q^2} - 2(1-x^2)\right) = 0$, $x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{Q^2} - 2(1-x^2) = 0$ ($x = \frac{\omega}{\omega_0}$)

$\Rightarrow \frac{1}{Q^2} - 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ $\Rightarrow$ pour $x = 1$, $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ $\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\boxed{\frac{\omega}{\omega_0} > 0}$

pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on a l'allure normale H_{dB} passe par −3dB
pour $\longrightarrow$ $(\omega = \omega_c)$ $x = 1$

pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ on a un extremum et pour $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ on a une fonction monotone.



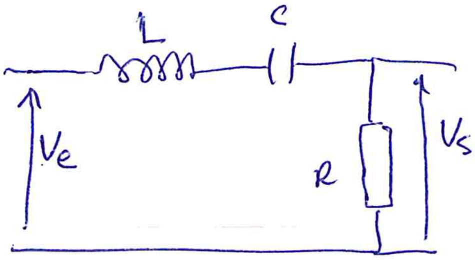
par exemple pour $Q > 2$ $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \Rightarrow \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

$Q = 2 \Rightarrow$. $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{8}} \sim \omega_0$ mais qui n'est pas ω_0 exacte

quand Q ↗ $\omega \simeq \omega_0$ et le gain Max vaut Q

$H = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}\Big|_{x=1} = Q$.

Etude d'1 filtre passe-bande 2ème ordre



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= \frac{RjC\omega}{jCR\omega + jLC\omega^2 + 1} = \frac{V_s}{V_e}$$

$$= \frac{R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{V_s}{V_e}$$

La forme générale :

la fonction de transfert d'un système $H = K\frac{V_s}{V_e} = H_0\frac{V_s}{V_e} = \frac{H_0 \; R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad , \boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$\omega_0 = \frac{R}{L}$

$\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Formes assymptotiques

$$H_{dB} = 20\log(H_0) - 20\log\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 20\log(H_0) - 10\log\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$$

$\omega \to 0$

$$H_{dB} = 20\log(H_0) - 10\log\left(\frac{\omega_0}{\omega}Q\right)^2$$

on néglige le 1

$$= 20\log(H_0) - 20\log\frac{\omega_0}{\omega}Q$$

$$= 20\log(H_0) - 20\left(\log\frac{\omega_0}{\omega} + \log Q\right)$$

$$= 20\log(H_0) + 20\log\frac{\omega}{\omega_0} - 20\log Q.$$

$$H_{dB} = 20\log(H_0) + 20\log\frac{x}{Q} \quad , \; x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$\omega \to \infty$

$$H_{dB} = 20\log(H_0) - 20\log\frac{\omega}{\omega_0}Q$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$\omega = \omega_0 \Rightarrow H_{dB} = 20\log(H_0)$, $\varphi = 0$

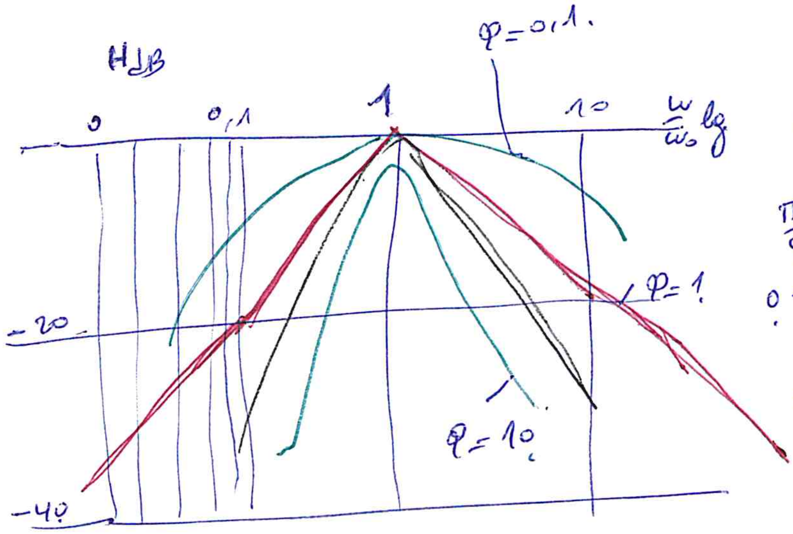
Les assymptotes se coupent en ce point $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$

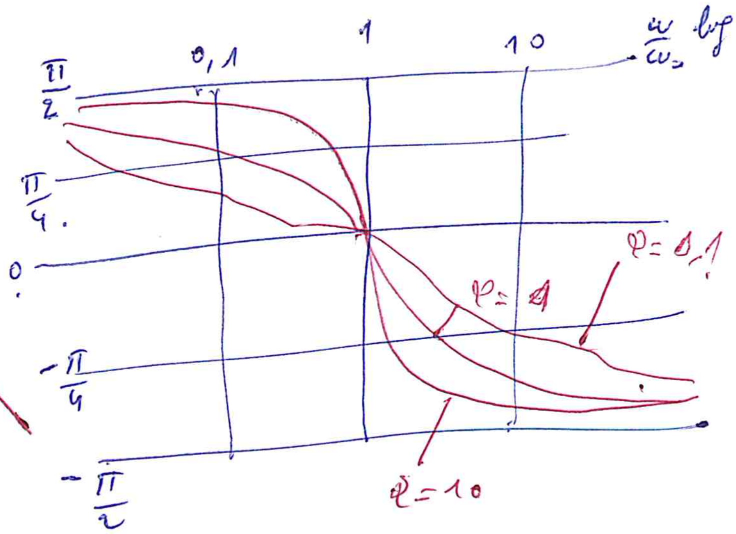
$H_{dB\,(\omega \to 0)}$ et $H_{dB\,(\omega \to \infty)}$ se coupent en ce point $\omega = \omega_0$

$\omega = \omega_0 \rightarrow 20\log(H_0) + 20\log(x) = 20\log H_0 - 20\log x$

$x = 1$ pour $\omega = \omega_0 \Rightarrow \log\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \boxed{20\log H_0 - 20\log Q = H_{dB}}$

donc les assymptotes sont au dessus de l'axe $H_{dB} = 0$





puisque c'est un passe bande, donc il y a deux fréquences ω_1 et ω_2

Cherchons ω_1 et ω_2.

$H(\omega_{1/2}) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$ donc il faut que $Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1$

$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm\frac{1}{Q} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm\frac{1}{Q} \Rightarrow x^2 - 1 = \frac{x}{Q} \Rightarrow x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0$

$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4.$

Q : facteur de qualité : il est utilisé pour mesurer la largeur de la bande (pass ba / Coupe b

$x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

$x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = +\frac{1}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$

$\Rightarrow \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q} = \frac{1}{Q} \Rightarrow$

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$