Chapitre I :

Introduction générale !

1. 1. Introduction:

La théorie du signal a pour objectif fondamental la description mathématique des signaux.

- La théorie du signal fournit les moyens de mise en évidence sous une forme mathématique commode, les principales caractéristiques d'un signal : La distribution spectrale de son énergie ou la distribution statistique de son amplitude par exemple ou encore la puissance. etc...

- Elle offre également les moyens d'analyser la nature des altérations ou modifications subies par les signaux lors de leur passage au travers de blocs fonctionnels. (C'est ainsi que l'on peut établir des règles à respecter pour passer d'un signal analogique à un signal numérique).

L'outil de base de la théorie du signal est le développement en séries de fonctions orthogonales.

Le développement le plus connu est : Le développement en Séries de Fourier.

Le signal !

Les relations de l'homme avec son milieu naturel ou avec les systèmes techniques qu'il construit se caractérisent par un échange d'information : on peut distinguer les types d'information;

- L'observation (mesure) des phénomènes physiques
- dialogue entre hommes (parole)
- dialogue entre machines entre-elles (

Cet échange d'informations est appelé souvent : Communication

- Communication : La Communication C'est faire passer (Convoyer) et recevoir les messages.

exemple : La parole ~~est~~ le moyen privilégié de communication entre les êtres humains.

donc la parole est l'information émise par une personne et reçue par une autre. Cet échange d'information s'effectue par l'intermédiaire des signaux.

C.à.dire : L'information (a) est besoin d'un support. Ce support est bien le signal.

Conclusion : Pour communiquer, nous avons besoin d'un support qui est le signal

1.2 Définitions :

- origine des signaux (*)

1.2.1 Signal :

C'est la représentation physique de l'information. C'est le support d'information.

Tout échange d'information s'effectue par l'intermédiaire de signaux.

Nature du signal :

Suivant la nature des système physique qui les génère, on distingue plusieurs nature de signaux :

- a : Signal Sonore (Son) reçu par l'oreille
- b : Signal lumineux (Image) (réception d'une image TV noir et blanc [Niveau de gris].
- b1 : électrique (Courant, Tension) ...
- c : Signal de Ore (température) : C'est un Signal Sentis par le corps (il y en a d'autres ....)
- d : Signal de position ; vitesse d'un point matériel en mouvement.
- e : Signal de type économique : Variation du prix du pétrole.
- f : Signal médical : Variation des battements du Cœur. (E.C.G).

1.2.2 : Caractéristiques du signal :

Un signal physique est décrit par un modèle mathématique approprié. Ce dernier représente la variation (Comportement) du signal physique dans le temps.

On distingue deux catégories de modèles mathématiques pour la description ~~phys.~~ des signaux physiques.

- le modèle déterministe : pour les signaux déterministes (Signaux dont le comportement futur est prévisible).
- le modèle probabiliste (Stochastique), pour les signaux aléatoires (Signaux dont le comportement du futur est imprévisible).

Chaque catégorie de signaux présente une définition propre des caractéristiques du signal.

On s'interesse aux signaux déterministes dont les caractéristiques essentielle sont les suivantes :

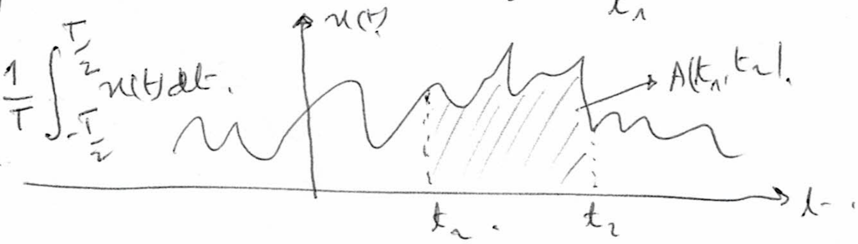
a- valeur moyenne d'un signal :

- Sur l'intervalle $[t_1, t_2]$:

$$\bar{x}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt.$$

Si $t_2 - t_1 = T$

$$\bar{x}\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt.$$



$$x(t_1, t_2) = \frac{A(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}.$$

- sur l'intervalle $\mathbb{R}\left(\left]-\infty, \infty\right[\right)$.

$$\bar{x} = \lim_{\substack{t_1 \to -\infty \\ t_2 \to \infty}} \bar{x}(t_1, t_2) = \lim_{\substack{t_1 \to -\infty \\ t_2 \to +\infty}} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

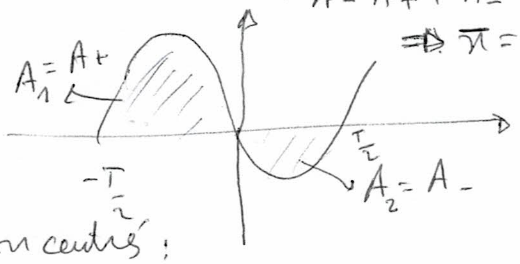
Remarque :

$x(t)$ est signal centré ssi $\bar{x} = 0$

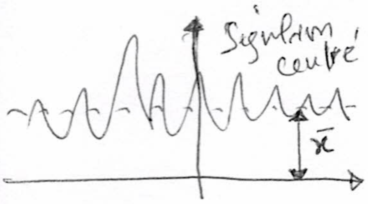
généralement les signaux qui ont une durée limitée sont des signaux centrés (les signaux à énergie finie) $\subset$ signaux transitoires

$A = A_+ + A_- = 0$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{A}{T} = 0$

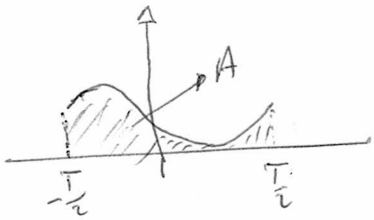


Pour les signaux non centrés :



$$x(t) = x(t) + \bar{x}$$

Signal non centré — signal centré — valeur moyenne

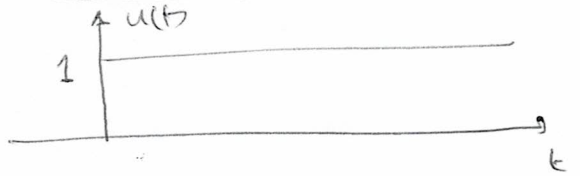


$\bar{x} = \frac{A}{T} \neq 0$

exemples des signaux non centrés

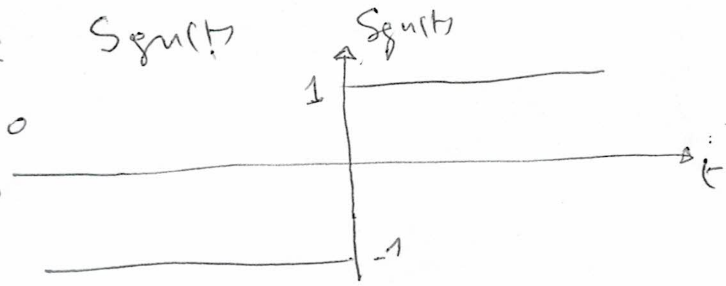
- **Signal echelon (signal saut unité) :**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



- **Signal signe :** Sgn(t)

$$\text{Sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & < 0 \end{cases}$$



b. Energie d'un signal :

b1 : - L'énergie ~~...~~ moyenne d'un signal sur un intervalle $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

$$E_x = E_x\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t)\, dt.$$

b2 : - L'énergie sur l'intervalle $]-\infty, \infty[$.

elle nous donne le module qui est une valeur réelle la phase nous informe sur autre ~~chose~~ chose

$$E_x = E_x(-\infty, \infty) = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, x^*(t)\, dt$$

b3: Energie instantanée :

$$E_x(t) = \begin{cases} x^2(t) & , x(t) : \text{réel} \\ x(t) \cdot x^*(t) & , x(t) : \text{Complexe.} \end{cases}$$

on remarque que l'energie est ~~tjs~~ ~~signal~~ le carré du signal.

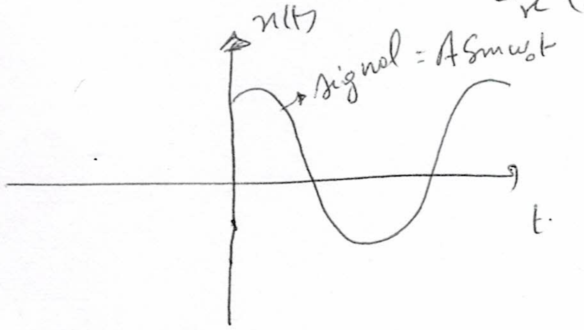
Exemple : $E_x(t) = R I^2 t = R I^2 dt$ (pour un instant dt)

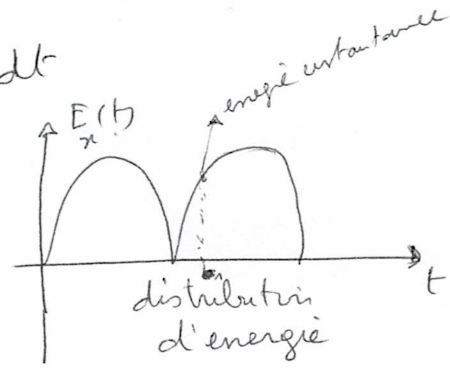
$E_x(t) = R \frac{U^2}{R^2} t = \frac{U^2}{R} dt$ (" " ")

Alors si $R = 1\,\Omega \Rightarrow$

$E_x(t) = I^2 dt$

$E_x(t) = U^2 dt$





On remarque que la distribution d'energie peut nous renseigner mieux que la presentation du signal seul.

C - Puissance d'un signal :

C1 : Puissance sur l'intervalle $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

$$P_x\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t)\, dt$$

$$P_x\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) = \frac{E\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)}{T}$$

La puissance d'un signal est une sorte d'une energie moyenne.

C2 : Puissance sur l'intervalle $\mathbb{R}$ $(-\infty, \infty)$

$$P_x = \lim_{\substack{t_1 \to -\infty \\ t_2 \to \infty}} P_x(t_1, t_2) = \lim_{\substack{t_1 \to -\infty \\ t_2 \to +\infty}} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt.$$

Si : $t_1 = -\frac{T}{2}$, $t_2 = \frac{T}{2}$ $\Rightarrow P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E_x(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

C3 : Puissance instantanée :

$P_x(t) = \frac{dE_x(t)}{dt}$; C'est la derivée de l'energie instantanée ~~par~~

Si $x(t) = U(t) \Rightarrow E_x(t) = U^2(t)\, dt$ $[V^2 s]$

alors $P_x(t) = \frac{d}{dt}[U^2(t) dt] = U^2$ $[V^2]$.

d - Valeur efficace d'un Signal :

d1 : Valeur efficace sur l'intervalle (t_1, t_2)

$$x_{eff}(t_1, t_2) = \sqrt{P_x(t_1, t_2)} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}$$

d2 : Valeur efficace sur $\mathbb{R}$ $(-\infty, \infty)$.

$$x_{eff}(t_1, t_2) = \sqrt{P_x} = \sqrt{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt}.$$

alors : P_x : Valeur ~~moyenne~~ quadratique moyenne

x_{eff} : racine carré de la valeur quadratique moyenne.

TD : Verifiez que $x_{eff}(0,T)$, $P_x(0,T)$, $\bar{x}(0,T)$, sont égals aux valeurs. (T : etant la periode, $x(t)$: periodique)

e - Interaction mutuelle entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$.

e1 : energie d'interaction :

Sur $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \rightarrow E_{xy}(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t)\, dt$

$$\text{Sur } (-\infty, \infty) \rightarrow E_{xy} = E_{xy}(-\infty, \infty) = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot y^*(t)\, dt$$

$$E_{yx} = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot x^*(t)\, dt$$

$$E_{xy}^* = E_{yx} \quad (\text{à faire}).$$

e2 : Puissance d'interaction :

$$P_{xy}\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) = \frac{E_{xy}\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)}{T}$$

$$P_{xy} = P_{xy}(-\infty, \infty) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\left[E_{x}\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{T \to \infty} P_{xy}\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right).$$

de même ; $P_{xy}^* = P_{yx}$

1.3 : classification des signaux :

On peut considérer plusieurs types de classification de signaux. Parmi les classifications, on peut citer :

ⓐ - { - déterministe / - aléatoire

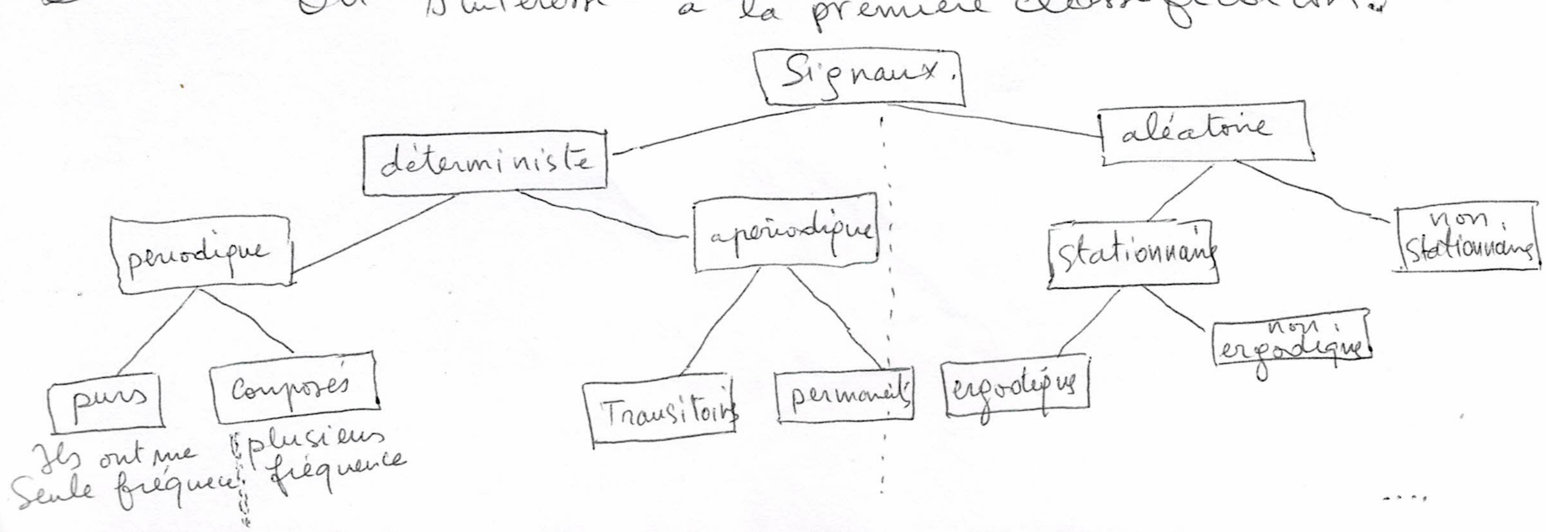
ⓑ - { pairs / impairs

ⓒ { d'énergie finie / d'énergie infinie : { ce sont les signaux de puissance. ex : le rayonnement solaire

ⓓ - { - analogique / - numérique

ⓔ - { - à Basse fréquence / - à haute fréquence.

On s'interesse à la première classification.



- Signaux ~~Aléatoires~~ Aléatoires : dépendent des lois du hasard (en plus de la variable temps), ils sont décrits par le modèle mathématique stochastiques (probabiliste), caractérisés par leurs propriétés statistiques. Classique
- Signaux déterministes : ne dépendent pas des lois du hasard, ils sont décrits par des modèles mathématiques déterministes (caractérisés par leurs propriétés temporelles) classique, valeur moyenne …

- **Pour les signaux périodiques** : un signal est périodique de période T_0 si : $x(t+kT_0) = x(t) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

  - **Signal périodique pur** : est un signal composé d'une seule fréquence.

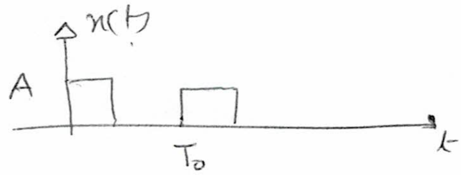
    ex : $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, $y(t) = A \cos(\omega_0' t + \varphi_0')$, $z(t) = A\, e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$

  - **Signal périodique composé** : il contient deux ou plusieurs (plus d'une fréquence), c.à.d deux ou plusieurs signaux périodiques.

    exemple :

    - Signal crenau :

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \frac{T_0}{2} < t \leq T_0 \end{cases}$$

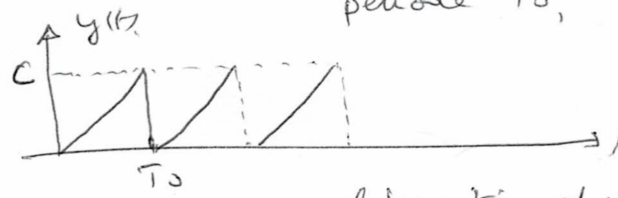


$x(t)$: périodique de période T_0

  - **Signal en dents de scie** :

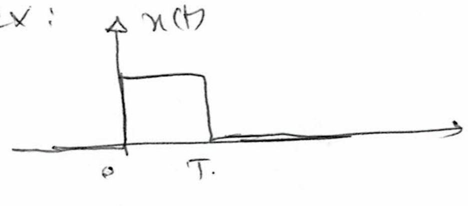
$$y(t) = \frac{C}{T_0}\, t \qquad 0 \leq t \leq T_0$$

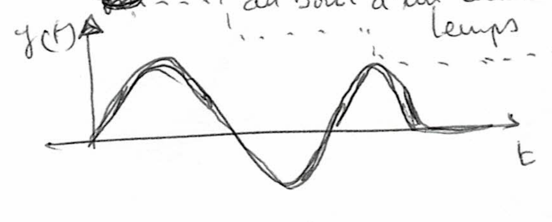
, $y(t)$: périodique de période T_0,



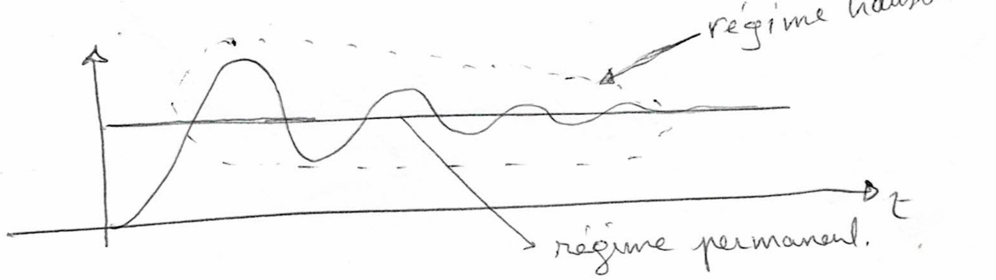
  - **Signal transitoire** : un signal transitoire est un signal qui tend vers zéro au bout d'un certain temps

ex :





  - **Signal transitoire supperposé à un signal permanent** :



1.4. Etude de quelques signaux particuliers :

① Signal sinusoïdal :

$$x(t) = x_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$ = fréquence du signal en $Hz \left(\frac{1}{sec}\right)$

~~f_0~~ : T_0 = période du signal en secondes.

$2\pi f_0 = \omega_0$ = pulsation en $\left(\frac{rad}{sec}\right)$

φ_0 = phase initiale.

$$x_p(t) = x_0 \frac{1}{2j}\left[e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} - e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}\right], -j$$

$$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{1}{j} = -j$$

$$x_p(t) = \frac{x_0}{2}\left[e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} + e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}\right]$$

$$\boxed{x_p(t) = \frac{x_0}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})} + \frac{x_0}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})}}$$

- ~~Représentation de Fresnel~~ :

il y a plusieurs types de représentations d'un signal.

il y a :

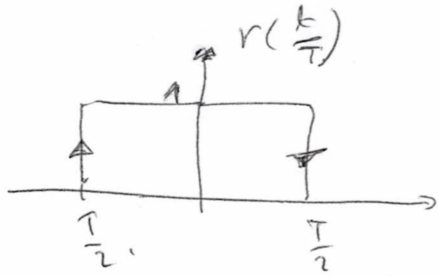
- La représentation temporelle : (représentation directe) réelle ou complexe.
  ~~représentation~~
  réelle : une seule information (~~[illegible]~~) c'est l'amplitude.
  Complexe : deux informations amplitude et phase.
- représentation fréquentielle (la variable c'est la fréquence)
- représentation vectorielle (Fresnel) : c'est une représentation indirecte
- représentation numérique : grâce au développement des circuits, systèmes le signal peut être représenté sous forme numérique.

on s'intéresse ici à la représentation vectorielle (Fresnel).

③ Signal rectangulaire : (signal porte, signal fenêtre)

il est défini par :

$$rect_T(t) = r\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



T : indique la largeur du rectangle :

Pour $T = 1$

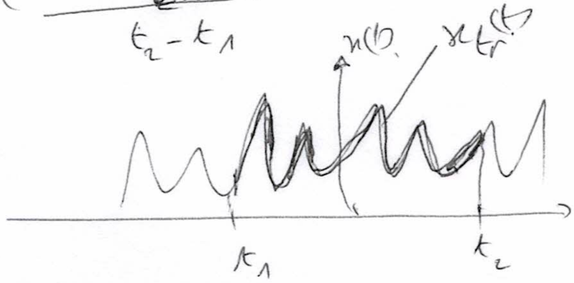
$$r(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

il peut être défini aussi :

$$r\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{T}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

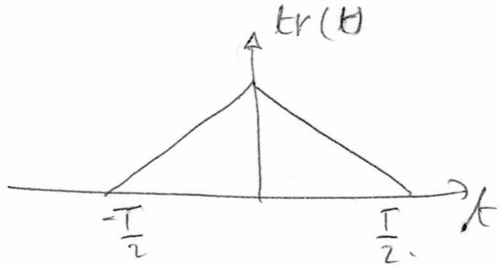
$$rect_T(t) = r\left(\frac{t}{T}\right) = u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

$$x_{tr}(t) = x(t) \text{ tronqué} = x(t)\, r\left(\frac{t - \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}{t_2 - t_1}\right)$$

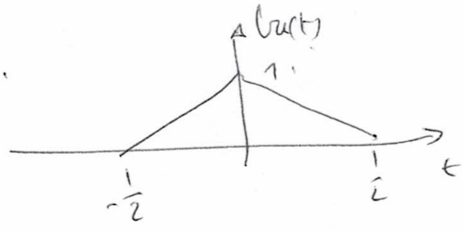


④ Signal triangulaire : $tri_T(t)$

$$tri_T(t) = tr(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T} + 1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -\frac{2t}{T} + 1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

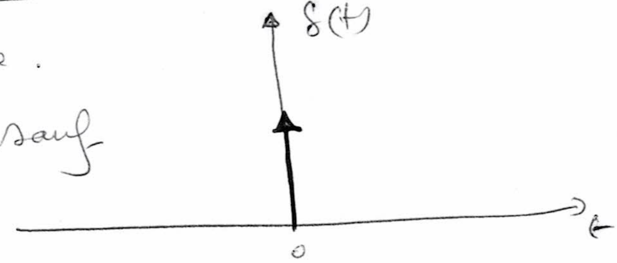


$$tri(t) = tr(t) = \begin{cases} 2t+1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \\ -2t+1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



5 Impulsion de Dirac (Distribution de Dirac :

on la note par une flèche.
Ce signal est partout nul sauf pour un point $t = t_0$.



On dit par convention qu'il a une masse à ce point ou un poids.

il est défini :

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

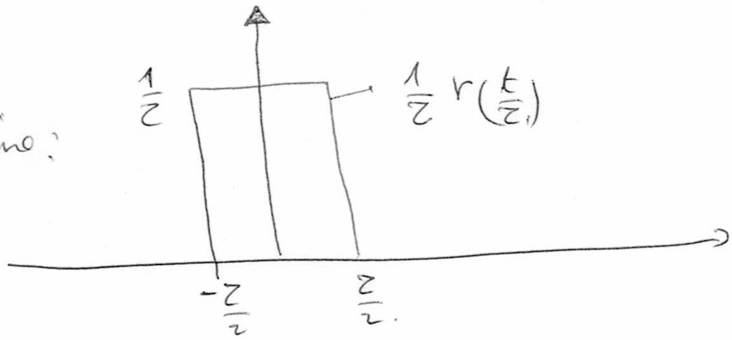
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

son intégrale égale à elle même (il n'y a pas de surface) parceque il n'y a pas de largeur

puisqu'il n'a pas largeur : il y aura pas de surface (l'air)

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ appelée masse de $\delta(t)$ ou poids de $\delta(t)$.

Si on considère le signal rectangulaire :



on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} r\left(\frac{t}{\tau}\right) dt = 1.$$

parceque la surface c'est : $\frac{1}{\tau} \cdot \tau = 1$

$$\boxed{\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} r\left(\frac{t}{\tau}\right) = \delta(t)}$$

donc $\delta(t)$ est la limite d'un signal rectangulaire de largeur τ et d'amplitude $\frac{1}{\tau}$

• Propriétés de $\delta(t)$:

ⓐ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. et $x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = x(0)$ et $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t)\, dt = x(0)$

ⓑ $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$, car : $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta(t) dt}_{0} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\infty} \delta(t) dt}_{0}$

ⓒ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$ et $x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$

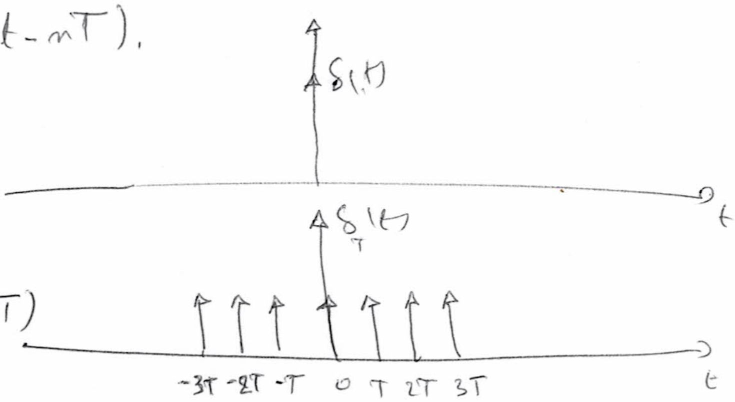
ⓓ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\, \delta(t - t_0)\, dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$

ⓔ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') dt' = 1$. car : $\begin{cases} t - t_0 = t' \\ t \to \pm\infty \Rightarrow t' \to \pm\infty \\ dt \to dt' \end{cases}$

6 peigne de Dirac : $\delta_T(t)$

$\delta_T(t)$: Suite périodique d'impulsions de Dirac de ~~pul~~ période T=cste

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT).$$



$$x(t) \cdot \delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t-nT)$$

d'autre part :

- $x(t) \cdot \delta(t-nT) = x(nT) \cdot \delta(t-nT)$
- $x(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t-nT)$
- $x(t) \cdot \delta_T(t)$: c'est le signal $x(t)$ echantillonné. $x_e(t) = x(t)\,\delta_T(t)$

Remarques :

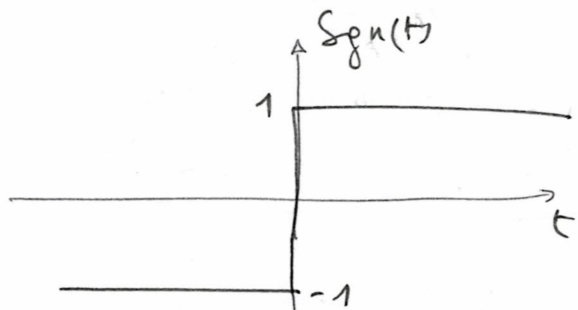
- $\delta_T(t) = \delta(t)$ pour $|t| < T$
- $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_T(t)\, dt = 1$ $\quad T > \forall\, \varepsilon > 0$, $\quad 0 < \varepsilon < T$

$\varepsilon \in]0, T[$

7 Signal Signe $Sgn(t)$:

$$Sgn(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

$$Sgn(t) = u(t) - u(-t)$$



8 Signal Sinus Cardinal (Sinc(t)) :

$Sinc(t) = \dfrac{Sin(\pi t)}{(\pi t)}$, $\dfrac{1}{\pi t}$: l'enveloppe , $Sin(\pi t)$ la fonction.

$Sinc(-t) = Sinc(t)$ il est pair.

Sinc(t) : Signal periodique amorti par la fonction $\dfrac{1}{\pi t}$

$Sinc(t) = 0$ ssi $\sin \pi t = 0$

$\Rightarrow \pi t = k\pi \Rightarrow t = k,\ k \neq 0$

$Sinc(t) = 0 \quad \forall\ t = k \in \mathbb{Z}^*$

pour $t = k = 0$ $\quad Sinc(0) = 1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$