Chapitre III

Séries et transformée de Fourier:

3.1 Séries de Fourier Trigonométriques :

3.1.1 : Définition

On considère l'ensemble des signaux périodiques de période T_0 arbitraire, qu'on note S_{T_0}.

Cet ensemble S_{T_0} forme un espace vectoriel de signaux.

dont
- (*) l'addition algébrique ~~est~~ soit une loi interne.
- (**) la multiplication " " " "

C'est dire :

(*) $\forall\ x(t), y(t) \in S_{T_0} \Rightarrow x(t) + y(t) \in S_{T_0}$

$\forall\ x(t+kT_0) = x(t)$, et $y(t+kT_0) = y(t) \Rightarrow$

$\left. x(t+kT_0) + y(t+kT_0) = x(t) + y(t) \right\} \in S_{T_0}$

(**) $\forall\ x(t) \in S$ et $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda x(t) \in S_{T_0}$

$x(t+kT_0) = x(t) \Rightarrow \lambda\, x(t+kT_0) = \lambda\, x(t)$

donc S_{T_0} forme bien un espace vectoriel de signaux.

Fourier a proposé la base $\left\{ \frac{1}{2}, \cos 2\pi n f_0 t, \sin 2\pi n f_0 t \right\}$.

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_0 = \frac{1}{T_0}$

est une base orthogonale de S_{T_0}

On démontre d'abord que cette base est orthogonale.

$\langle \frac{1}{2}, \cos 2\pi n f_0 t \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\langle \frac{1}{2}, \sin 2\pi n f_0 t \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\langle \cos 2\pi n f_0 t, \sin 2\pi m f_0 t \rangle = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*$

$\langle \cos 2\pi n f_0 t, \cos 2\pi m f_0 t \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m \\ \text{cste} = \text{norme} & \text{pour } n = m \end{cases}$

$\langle \sin 2\pi n f_0 t, \sin 2\pi m f_0 t \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m \\ \text{cste} = \text{norme} & \text{pour } n = m \end{cases}$

Le produit scolaire est définie par :

$$\langle \cos 2\pi n f_0 t , \sin 2\pi m f_0 t \rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos 2\pi n f_0 t \sin 2\pi m f_0 t \, dt$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right) \quad \text{car :} \begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{cases}$$

donc :

$$\langle \cos 2\pi n f_0 t , \sin 2\pi m f_0 t \rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{1}{2}\left[\sin 2\pi (n+m) f_0 t - \sin 2\pi (n-m) f_0 t\right] dt$$

Comme $\sin 2\pi (n+m) f_0 t$ est périodique de période $\frac{T_0}{n+m} = T_0'$

et $\sin 2\pi (n-m) f_0 t$ est périodique de période $\frac{T_0}{n-m} = T_0''$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin 2\pi (n+m)\, dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin 2\pi (n-m) f_0 t \, dt = 0$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

maintenant : $$\langle \cos 2\pi n f_0 t , \cos 2\pi m f_0 t \rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos 2\pi (n+m) f_0 t + \cos 2\pi (n-m) f_0 t \, dt$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ pour } n \neq m \\ \text{cste } = \frac{1}{2} \text{ "représente la norme au carré"} \end{cases}$$

donc $\langle \cos 2\pi n f_0 t , \cos 2\pi m f_0 t \rangle = \frac{1}{2} = \|\cos 2\pi n f_0 t\|^2$

$$\Rightarrow \boxed{\|\cos 2\pi n f_0 t\| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

de même pour $\langle \sin 2\pi n f_0 t , \sin 2\pi m f_0 t \rangle$ aussi

$$\boxed{\|\sin 2\pi n f_0 t\| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

il reste : $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{4}$

donc $\|\frac{1}{2}\| = \frac{1}{2}$.

$\left\{\frac{1}{2}, \cos 2\pi n f_0 t, \sin 2\pi n f_0 t\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc la base est orthogonale, elle n'est pas orthonormale

mais si on multiplie par 2 et $\sqrt{2}$ $\Rightarrow \left\{1, \sqrt{2}\cos 2\pi n f_0 t, \sqrt{2}\sin 2\pi n f_0 t\right\} \Rightarrow$ base orthonormale donc $\forall\ x(t) \in S \Rightarrow$

$$x(t) = \underbrace{a_0 \left(\tfrac{1}{2}\right)}_{\text{élément de base}} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \underbrace{\cos 2\pi n f_0 t}_{\text{élément de base}} + b_n \underbrace{\sin 2\pi n f_0 t}_{\text{élément de base}}\Big)$$

plus que n augmente, plus que la somme tend vers $x(t)$ parce que l'infini n'existe pas (on peut developper jusqu'à une certaine valeur N.)

Alors :

$$x_N(t) = a_0 \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n_0 f_0 t\right)$$

$$x(t) = \lim_{N \to \infty} x_N(t)$$

en d'autre terme on peut écrire :

$$d_1^2(x(t), x_N(t)) \longrightarrow 0 \quad \text{si } N \longrightarrow \infty$$

3.1.2. Détermination des coefficients : a_0, a_n, b_n :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t\right)$$

Comme la base est orthogonale on aura :

$$\langle x(t), \tfrac{1}{2} \rangle = \left\langle \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t\right)\right), \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= a_0 \langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \underbrace{\langle \cos 2\pi n f_0 t, \tfrac{1}{2}\rangle}_{0 \text{ base orthogonale}} + b_n \underbrace{\langle \sin 2\pi n f_0 t, \tfrac{1}{2} \rangle}_{0 \text{ base orthogonale}}\Big)$$

$$\Rightarrow \langle x(t), \tfrac{1}{2} \rangle = a_0 \langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \rangle \Rightarrow a_0 = \frac{\langle x(t), \frac{1}{2} \rangle}{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle} = \frac{\langle x(t), \frac{1}{2} \rangle}{\frac{1}{4}}$$

$$a_0 = 4 \cdot \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, dt.$$

Car le signal $x(t)$ est périodique de période T_0 et on divise par T_0 parce que il s'agit de signaux a engie infinie

$$\langle x(t), \cos 2\pi n f_0 t \rangle = \langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos 2\pi k f_0 t + b_k \sin 2\pi k f_0 t\right), \cos 2\pi n f_0 t \rangle$$

$$= a_0 \underbrace{\langle \frac{1}{2}, \cos 2\pi n f_0 t \rangle}_{0\ \forall n=1,\dots,\infty} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k \underbrace{\langle \cos 2\pi k f_0 t, \cos 2\pi n f_0 t\rangle}_{0\ n \neq k \text{ uniquement}} + b_k \underbrace{\langle \sin 2\pi k f_0 t, \cos 2\pi n f_0 t \rangle}_{0\ \forall k}\Big]$$

$$\langle x(t), \cos 2\pi n f_0 t \rangle = a_n \langle \cos 2\pi n f_0 t, \cos 2\pi n f_0 t \rangle \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{\langle x(t), \cos 2\pi n f_0 t \rangle}{\langle \cos 2\pi n f_0 t, \cos 2\pi n f_0 t \rangle}, \quad \forall n = 1, \dots \infty$$

Comme il s'agit de signaux périodiques (T_0) donc à énergie infinie alors:

$$a_n = \frac{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos 2\pi n f_0 t \, dt}{\frac{1}{2}}, \text{ car: } \langle \cos 2\pi n f_0 t, \cos 2\pi n f_0 t \rangle = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos 2\pi n f_0 t \, dt$$

$$\langle x(t), \sin 2\pi n f_0 t \rangle = \langle \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos 2\pi m f_0 t + b_m \sin 2\pi m f_0 t\right), \sin 2\pi n f_0 t \rangle$$

$$\langle x(t), \sin 2\pi n f_0 t \rangle = a_0 \underbrace{\langle \frac{1}{2}, \sin 2\pi n f_0 t \rangle}_{0 \text{ base orthogonale}} + \sum_{m=1}^{\infty}\Big[a_m \underbrace{\langle \cos 2\pi m f_0 t, \sin 2\pi n f_0 t \rangle}_{0 \text{ base orthogonale}} + b_m \underbrace{\langle \sin 2\pi m f_0 t, \sin 2\pi n f_0 t \rangle}_{0 \text{ pour } n \neq m}\Big]$$

pour $n = m$

$$\langle x(t), \sin 2\pi n f_0 t \rangle = b_m \langle \sin 2\pi n f_0 t, \sin 2\pi n f_0 t \rangle$$

$$b_n = \frac{\langle x(t), \sin 2\pi n f_0 t \rangle}{\langle \sin 2\pi n f_0 t, \sin 2\pi n f_0 t \rangle} = \frac{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin 2\pi n f_0 t \, dt}{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin 2\pi n f_0 t \, dt}$$

donc:

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, dt, \quad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos 2\pi n f_0 t \, dt, \quad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin 2\pi n f_0 t \, dt$$

3.1.3 Propriétés :

Si $x(t)$ est un signal pair : $x(-t) = x(t)$ et $x(t) \in S_{T_0}$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t + \sum_{n=}^{\infty} b_n \sin 2\pi n f_0 t .$$

$$x(t) = x_1(t) . \quad + x_2(t)$$

avec :
$$x_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t .$$

$$x_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi n f_0 t$$

$x(t)$ est périodique (T_0) $\Rightarrow$ sa fréquence fondamentale "f_0"

$$x_1(-t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0(-t) = x_1(t) \Rightarrow x_1(t) : \text{pair}$$

$$x_2(-t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi n f_0(-t) = -x_2(t) \Rightarrow x_2(t) \text{ est impaire}$$

Si $x(t)$ est pair $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Si $x(t)$ est impaire $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (y compris a_0).

$\frac{a_0}{2}$: Composante spéctrale continue ou valeur moyenne de $x(t)$

$a_1 \cos 2\pi f_0 t + b_1 \sin 2\pi f_0 t$: Composante spectrale d'ordre 1 ou fondamentale.

$a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t$: Composante spectrale d'ordre n ou harmonique d'ordre n.

on a dans ces composantes deux informations :
<u>L'amplitude</u> et la <u>phase</u>.

Chaque harmonique est representé par (a_n, b_n)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , A_n \geq 0 \ \forall n$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{a_n}{A_n} \cos 2\pi n f_0 t + \frac{b_n}{A_n} \sin 2\pi n f_0 t \right)$$

$$\frac{a_n^2}{A_n^2} + \frac{b_n^2}{A_n^2} = 1$$

on peut poser :

$$\frac{a_n}{A_n} = \cos\varphi_n \quad \text{et} \quad \frac{b_n}{A_n} = \sin\varphi_n$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos\varphi \cos 2\pi n f_0 t + \sin\varphi \sin 2\pi n f_0 t)$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)}$$

il ne faut pas confondre avec la partie pair d'un signal parceque ici il y a le "φ"

C'est le développement en cosinus de $x(t)$

On peut trouver le développement en sinus en prenant :

$$\frac{a_n}{A_n} = \sin\varphi_n \quad \text{et} \quad \frac{b_n}{A_n} = \cos\varphi_n$$

donc :

$\frac{a_0}{2}$ = valeur moyenne :

$A_1 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_1)$: fondamental

$A_n \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)$: l'harmonique d'ordre n.

Chaque composante spectrale est représenté par une amplitude et une phase, soit le couple (A_n, φ_n)

tel que : $\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & \text{amplitude de l'harmonique d'ordre } n \\ \varphi_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & \text{phase initiale de l'harmonique d'ordre } n \end{cases}$

Chaque harmonique est représentée par son amplitude et sa phase initiale.

- Notion de spectre d'un signal :

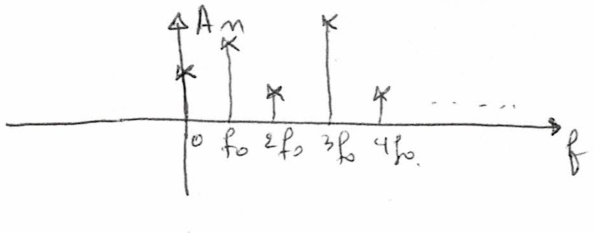
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)$$

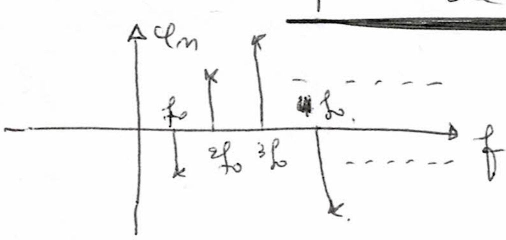
$$A_n = \begin{cases} \left|\frac{a_0}{2}\right| & \text{pour } n = 0 \\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \qquad \varphi_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_0 \geq 0 \\ \pi & \text{si } a_0 \leq 0 \end{cases} \; n = 0 \\ \operatorname{Arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \; n \in \mathbb{N}^*$$

L'ensemble $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui constituent les amplitude de toutes les composantes spectrales du signal $x(t)$ est appelé : Spectre d'amplitude

L'ensemble $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ = phases de toutes les composantes spectrales de $x(t)$ constitue le spectre de phase

$A_n \geq 0$





3.2. Séries de Fourier exponentielle :

Soit : $x(t)$ périodique (T_0) quelconque

on a vu $x(t)$ décomposé en fonction de la base

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos 2\pi n f_0 t, \sin 2\pi n f_0 t \right\} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

qui est une base ~~réelle~~ de Fourier trigonométrique (réelle)

{C qui est une base réelle}

Construire les séries de Fourier trigonométriques avec (a_n, b_n) coefficients de Fourier réels

maintenant on décompose le signal $x(t)$ en fonction de la base $\{e^{j2\pi n f_0 t}\}$ base de Fourier exponentielle (Complexe)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

Constitue la Série de Fourier exponentielle.

3.2.1 base exponentielle de Fourier !

il faut vérifier : $\langle e^{j2\pi n f_0 t} \cdot (e^{j2\pi m f_0 t})^* \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \text{cte} & n = m \end{cases}$

alors :

$$\langle e^{j2\pi n f_0 t} \cdot e^{-j2\pi m f_0 t} \rangle = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(n-m)t} \, dt = \begin{cases} T_0 & \text{pour } n = m \\ 0 & \text{pour } n \neq m \end{cases}$$

1 pour $n = m$

$$\Rightarrow \left\{ e^{j2\pi n f_0 t} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ est une base orthogonale.}$$

$$\frac{e^{j2\pi(n-m)t}}{j(2\pi(n-m))}$$

$$\underbrace{e^{j2\pi n f_0 t}}_{\text{base complexe}} = \cos 2\pi n f_0 t + j \sin 2\pi n f_0 t$$

deux éléments de la base réelle combinés pour nous donnes une base complexe

3.2.2 : Détermination des Coefficients Complexes :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

on a : $\alpha_n = \dfrac{\langle x(t), \psi_n^*(t) \rangle}{\| \psi_n(t) \|^2}$ $\forall n$ donc : $X_n = \dfrac{\langle x(t), e^{j2\pi n f_0 t} \rangle}{\| e^{j2\pi n f_0 t} \|^2}$

or on a demontré que $\| e^{j2\pi n f_0 t} \|^2 = T_0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

donc : $\boxed{X_n = \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Comme $x(t)$ periodique (T_0)

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \left[\cos 2\pi n f_0 t - j \sin 2\pi n f_0 t \right) dt$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \cos 2\pi n f_0 t \, dt - \frac{j}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin 2\pi n f_0 t \, dt$$

$$X_n = X_{n_{reel}} - j X_{n_{Img}}$$

. Ce terme complexe lui aussi, il enveloppe deux informations Amplitude et phase.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}.$$

X_0 = Valeur moyenne.

$X_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} + X_1 e^{j2\pi f_0 t}$: le fondamental

$X_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t} + X_n e^{j2\pi n f_0 t}$: l'harmonique d'ordre n

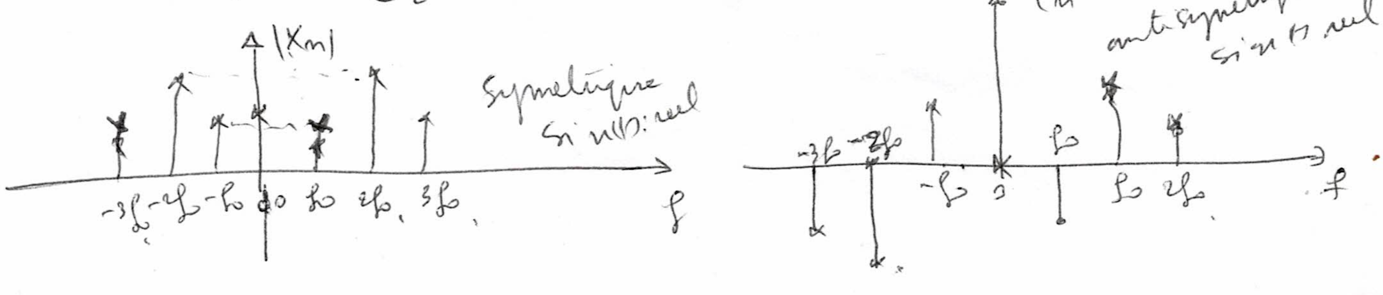
Chaque Composante spectrale est décrite par le couple $(X_n ; X_{-n})$

ici on parle du spectre bilatérial

$$X_n = |X_n| e^{j \operatorname{Arg}(X_n)}.$$
$$= |X_n| e^{j\varphi_n}$$

$\{|X_n|\}_{n\in\mathbb{Z}}$ spectre d'amplitude bilatéral

$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ spectre de phase bilateral.



- Quelques propriétés :

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt \quad , \quad X_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{j2\pi n f_0 t}\, dt$$

pour les signaux réels on a :

$$X_{-n} = X_n^* \Rightarrow \begin{cases} |X_{-n}| = |X_n| \Rightarrow \text{spectre d'amplitude est symétrique.} \\ Arg(X_{-n}) = -Arg(X_n) \Rightarrow \text{le spectre de phase est antisymétrique} \end{cases}$$

- Relation entre les coefficients de Fourier réels et les coefficients complexes :

$$\{a_n, b_n\} \underset{}{\overset{?}{\rightleftarrows}} X_n$$

$x(t)$ périodique (T_0) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t) \quad \text{--- (1)} \\ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\, e^{j2\pi n f_0 t} \end{cases}$$

$$x(t) = X_0 + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty}(X_{-n}+X_n)\cos} \sum_{n=1}^{\infty}\left(X_{-n}\, e^{-j2\pi n f_0 t} + X_n\, e^{j2\pi n f_0 t}\right)$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(X_{-n}+X_n)\cos 2\pi n f_0 t + j\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - X_{-n})\sin 2\pi n f_0 t \quad \text{--- (2)}$$

Comparons (1) et (2) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \frac{a_0}{2} \\ X_n + X_{-n} &= a_n \\ j(X_n - X_{-n}) &= b_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_n \\ X_{-n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_n \\ X_{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

3.3 Transformation de Fourier :

3.3.1 : Définition :
Soit $x(t)$ un signal quelconque

et soit $x_{T_0}(t) = x(t) \cdot r\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } |t| < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

On considère ~~un~~ le signal périodique (T_0) obtenu par répétition du signal $x_{T_0}(t)$ ~~qui note~~ qu'on note : $x_{T_0 rep}(t)$

$$x_{T_0 rep}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad , \quad X_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0 rep}(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

on fait tendre T_0 vers l'infini $\Rightarrow x_{T_0 rep}(t) \to x(t)$

alors : $$x_{T_0 rep}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0 rep}(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt}_{X_n} \Big) e^{j2\pi n f_0 t}$$

Si $T_0 \to \infty \Rightarrow x_{T_0 rep}(t) \longrightarrow x(t)$ | ~~$nf_0 \to f$ continue~~

donc $f_0 = \frac{1}{T_0} \longrightarrow df$ (très très petit) | ~~$(n+1)f_0 - nf_0 = \Delta f = f_0$~~

$\underbrace{n f_0}_{\text{fréquence discrète}} \longrightarrow f$: fréquence continue car : $\underbrace{(n+1)f_0 - nf_0 = \Delta f = f_0}_{\text{très serrée}}$

alors nf_0 est une somme très serrée ~~$\Rightarrow$~~ ;
il s'agit d'une chose continue parce que $n \to \infty$
et donc :
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow{\Delta f = f_0} \int_{-\infty}^{\infty} df \quad \text{et } nf_0 = f.$$

alors : $$x(t) = x_{T_0 rep}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\underbrace{df}_{\frac{1}{T_0}} . \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi (nf_0) t}\, dt\Big) e^{j2\pi (nf_0) t} ~~dt~~$$

$$x(t) = x_{T_0 rep}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{X(f)} \Big) e^{j2\pi f t}\, df.$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \\ X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \end{aligned}}$$

$X(f) = TF\{x(t)\}$
$x(t) = TF^{-1}\{X(f)\}$

$X(f)$ est une fonction complexe.

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi f t\, dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi f t\, dt \quad , \quad X(f) = X_r(f) - jX_i(f)$