Chapitre II

Représentation Vectorielle des signaux :

2.1 : Notion d'espace Vectoriel de signaux :

un signal (sinusoïdal ~~périodique~~) peut être représenté par un Vecteur tournant (Comme on a vu dans la représentation de Fresnel).

un signal périodique **est** composé de plusieurs signaux périodiques purs (plusieurs harmonique).

Chaque harmonique peut être représenté par un Vecteur. La Somme des Composants Constitue le vecteur composé.

donc il faut d'abord définir qu'est ce qu'un e.v.

2.1.1 Définition :

Un ensemble S de signaux forme un espace vectoriel si les deux Conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall\, x(t), y(t) \in S \Rightarrow x(t) \pm y(t) \in S$

C'est à dire que "$\pm$" est une loi interne par rapport à S (loi interne veut dire que la somme algébrique (+) de deux élément d'un espace est un élément du même espace)

- $\forall\, x(t) \in S$ $\forall\, \lambda$ un scalaire on a :

$$\lambda\, x(t) \in S$$

C'est à dire La multiplication par un scalaire est une loi interne aussi par rapport à S.

exemples :

- L'ensemble des signaux périodique (T_0) forme un ev car la Somme de deux signaux périodique est un signal périodique.
- L'ensemble des signaux d'énergie finie forme un eV (L_2) (L_2 : Signifie d'énergie finie)
- l'ensemble des signaux à pas d'escalier forme un eV

La norme dans l'espace euclidien n'est qu'une longueur.

Module et Norme

(a) - espace Vectoriel normé.

un espace vectoriel S est dit normé SSI

$\forall\, x(t) \in S$ on associe un nombre réel ≥ 0 noté $\|x\|$ appelé norme de $x(t)$.

$$\|x(t)\| = 0 \quad \text{SSi} \quad x(t) = 0 \quad \forall t.$$

(b) espace Vectoriel métrique :

un espace vectoriel S est dit métrique SSi. à tout couple $(x(t), y(t)) \in S$ on associe un nombre réel ≥ 0 noté $d(x,y)$ appelé distance de $x(t), y(t)$

$$d(x,y) = 0 \quad \text{SSi} \quad x(t) = y(t), \ \forall t$$

(La distance est max lorsque $V_1 \perp V_2$ et elle est min. si V_1 et colinéaire avec V_2 $\xrightarrow{V_1} \xrightarrow{V_2}$.

- La relation entre la distance et la norme d'un eV est : $d(x,y) = \|x - y\|$

(c) espace de signaux complet :

Soit $x_m(t)$ une suite de signaux $\in S$

on dit que $x_m(t)$ converge vers $x(t) \in S$ $(\lim_{m \to \infty} x_m(t) = x(t))$ périodique

Si : $\lim_{n \to \infty} d(x_m, x) = 0$ (La somme de signaux sinusoïdale égale à un signal périodique

un espace vectoriel de signaux noté S est dit Complet SSi toute suite d'éléments $x_m(t)$ de S converge vers un élément $x(t) \in S$ → série de Fourier

(d) espace de Hilbert : C'est un EV de signaux normé métrique et complet muni d'un produit scalaire induisant une norme. Il est aussi appelé espace Hilbertien.

L'espace L_2 des signaux d'énergie finie forme un espace de Hilbert

2.1.2 Produit scalaire et orthogonalité des signaux :

Soit $x(t)$ un signal appartenant à un espace vectoriel de signaux S dont $\{\varphi_k(t)\}_{k=1,\dots n}$ est une base de S on peut écrire :

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(t) \quad ,$$

donc

$$x(t) \in S \iff x(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(t)$$

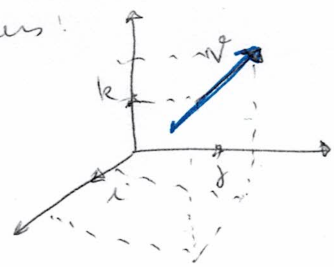
α = un élément de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

$$x(t) \in S \xleftrightarrow{\quad} \cancel{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ (ou } \mathbb{R}^n)$$

bijection
relation biunivoque
entre S et $\mathbb{C}^n$

$(\alpha_k)_{k=1,\dots n}$ sont les composantes de $x(t)$ par rapport à la base $\{\varphi_k(t)\}$.

ex : cas des vecteurs :



$$\vec{V} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$$

- produit scalaire

α = un élément

$$\vec{V} \in S \rightleftarrows (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ est donnée par :

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \underbrace{\|\vec{V_1}\| \|\vec{V_2}\| \cos(\vec{V_1}, \vec{V_2})}_{\text{c'est un scalaire}} = \underbrace{V_{x_1} V_{x_2} + V_{y_1} V_{y_2} + V_{z_1} V_{z_2}}_{\text{C'est un scalaire}}.$$

avec $\vec{V_1}(V_{x_1}, V_{y_1}, V_{z_1})$
$\vec{V_2}(V_{x_2}, V_{y_2}, V_{z_2})$

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux de S, on définit le produit scalaire de $x(t)$ et $y(t)$ par :

$$\langle x(t), y^*(t) \rangle = K \int_T x(t) \cdot y^*(t)\, dt \quad , \quad T : \text{intervalle à préciser.}$$

Rq : le produit ce n'est qu'une somme (addition) grande addition $\Rightarrow$ il s'agit d'une force (d'une énergie).

K = paramètre qui dépend de la nature des signaux (l'espace considéré).

- espace $L_2 \Rightarrow K = 1$ espace des signaux à énergie finie
- espace des signaux à énergie infinie $\Rightarrow K = \frac{1}{T}$

donc pour :

- L'espace L_2 : $\langle x(t), y^*(t) \rangle = \int_T x(t)\, y^*(t)\, dt = E_{xy}(T)$
- espace des signaux d'énergie infinie :

$$\langle x(t), y^*(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t)\, y^*(t)\, dt = \frac{E_{xy}(T)}{T} = P_{xy}(T)$$

alors soit :

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(t)$$

$$y(t) = \sum_{l=1}^{N} \beta_l \varphi_l(t)$$

$$\langle x(t), y^*(t) \rangle = \langle \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(t), \sum_{l=1}^{N} \beta_l^* \varphi_l^*(t) \rangle$$

Le produit scalaire est distributif, donc :

$$\langle x(t), y^*(t) \rangle = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=} \alpha_k \beta_k^* \langle \varphi_k(t), \varphi_l^*(t) \rangle$$

si $\{\varphi_k(t)\}$ est orthogonale $\Rightarrow \langle \varphi_k(t), \varphi_l^*(t) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k \\ 1 & \text{si } l = k \end{cases}$

$$\langle x(t), y^*(t) \rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k^*$$

2.1.3. Composantes d'un signal $x(t)$ par rapport à une base $\{\varphi_k(t)\}_{k=1,2,\ldots,N}$.

Soit S ~~une base~~ espace vectoriel de signaux et $\{\varphi_k(t)\}_{k=1,2,\ldots,N}$ une base de S.

$$\forall\, x(t) \in S \Rightarrow x(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(t).$$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ Composantes de $x(t)$ par rapport à $\{\varphi_k(t)\}_{k=1,\ldots,N}$ la base

Détermination des $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots,N}$.

Soit le produit scalaire :

$$\langle x(t), \varphi_k^*(t)\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n(t), \varphi_k^*(t)\right\rangle = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle \varphi_n(t), \varphi_k(t)\rangle$$

alors :

$$\langle x(t), \varphi_1^*(t)\rangle = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle \varphi_n(t), \varphi_1^*(t)\rangle$$

$$\langle x(t), \varphi_2^*(t)\rangle = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle \varphi_n(t), \varphi_2^*(t)\rangle$$

$$\vdots$$

$$\langle x(t), \varphi_N^*(t)\rangle = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle \varphi_n(t), \varphi_N^*(t)\rangle$$

Notation :

$$\Gamma = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1^*(t)\rangle \\ \langle x(t), \varphi_2^*(t)\rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_N^*(t)\rangle \end{bmatrix}}_{\text{Vecteur}}, \quad \alpha = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}}_{\text{Vecteur}}$$

$$\Theta = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \varphi_1(t), \varphi_1^*(t)\rangle & \cdots & \langle \varphi_1(t), \varphi_N^*(t)\rangle \\ \vdots & & \\ \langle \varphi_N(t), \varphi_1^*(t)\rangle & \cdots & \langle \varphi_N(t), \varphi_N^*(t)\rangle \end{bmatrix}}_{\text{Matrice}}$$

Θ = Matrice $(N \times N)$

$$\underbrace{\Gamma}_{\text{Matrice}(N,1)} = \underbrace{\Theta^t}_{(N,N)} \underbrace{\alpha}_{(N,1)}$$

, La transposé d'une matrice $[a_{ij}]^t = [a_{ji}]$

$$\begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1^*(t)\rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_N^*(t)\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1(t), \varphi_1^*(t)\rangle, & \cdots & \langle \varphi_1(t), \varphi_N^*(t)\rangle \\ \vdots & & \\ \langle \varphi_N(t), \varphi_1^*(t)\rangle & \cdots & \langle \varphi_N(t), \varphi_N^*(t)\rangle \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}$$

pour $k=1$

$$\langle x(t), \psi_1^*(t)\rangle = \langle \psi_1(t), \psi_1^*(t)\rangle \alpha_1 + \langle \psi_2(t), \psi_1^*(t)\rangle \alpha_2 + \cdots \langle \psi_N(t), \psi_1^*(t)\rangle \alpha_N$$

$$\langle x(t), \psi_1^*(t)\rangle = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle \psi_N(t), \psi_1^*(t)\rangle$$

$$\Gamma = \Theta^t \alpha \Rightarrow \underset{(N,1)}{\alpha} = \underset{(N,N)}{\left[\Theta^t\right]^{-1}} \underset{(N,1)}{\Gamma}$$

- Propriété de Θ :

$$\begin{bmatrix} \ddots & \overbrace{\langle \psi_m(t), \psi_k^*(t)\rangle}^{\Theta_{mk}} \\ \underbrace{\langle \psi_k(t), \psi_m^*(t)\rangle}_{\Theta_{km}} & \ddots \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \Theta_{mk} &= \langle \psi_m(t), \psi_k^*(t)\rangle \\ \Theta_{km} &= \langle \psi_k(t), \psi_m(t)\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Theta_{km}^* = \langle \psi_k(t), \psi_m^*(t)\rangle^* = \langle \psi_k^*(t), \psi_m(t)\rangle = \Theta_{mk}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} & \Theta_{mk} \\ \Theta_{mk}^* & \end{bmatrix}$$

- Si $\{\psi_k(t)\}_{k=1,\dots,N}$ est une base orthogonale de S

$$\Rightarrow \Theta_{mk} = \langle \psi_m(t), \psi_k(t)\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k \\ \|\psi_k\|^2 & \text{si } m = k \end{cases}$$

$$\left.\Theta_{mk} = 0 \quad \forall\, k \neq m, \quad \begin{matrix} m = 1, \dots, N \\ k = 1, \dots, N \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

Θ est diagonale $\quad \Theta = \begin{bmatrix} \|\psi\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|\psi\|^2 \end{bmatrix} = \Theta^t$

- Si $\{\psi_k(t)\}_{k=1,\dots,N}$ est une base orthonormale de S

Θ devient une matrice Identité $\quad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

- Cas d'une base orthogonale $\{\varphi_k(t)\}_{k=1,\dots,N}$

$$\Gamma = \Theta^t \alpha$$

$$\begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1^*(t)\rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_k^*(t)\rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_N^*(t)\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1(t), \varphi_1^*(t)\rangle & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \langle \varphi_k(t), \varphi_k^*(t)\rangle & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \langle \varphi_N(t), \varphi_N^*(t)\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}$$

$$\langle x(t), \varphi_1^*(t)\rangle = \alpha_1 \langle \varphi_1(t), \varphi_1^*(t)\rangle \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\langle x(t), \varphi_1^*(t)\rangle}{\langle \varphi_1(t), \varphi_1^*(t)\rangle}$$

$$\vdots$$

$$\langle x(t), \varphi_k(t)\rangle = \alpha_k \langle \varphi_k(t), \varphi_k^*(t)\rangle \Rightarrow \alpha_k = \frac{\langle x(t), \varphi_k^*(t)\rangle}{\langle \varphi_k(t), \varphi_k^*(t)\rangle}$$

$$\boxed{\alpha_k = \frac{\langle x(t), \varphi_k^*(t)\rangle}{\langle \varphi_k(t), \varphi_k^*(t)\rangle}} \quad \forall\, k = 1, \dots, N$$

Si $\varphi_k(t)$: orthonormale $\Rightarrow \langle \varphi_k(t), \varphi_k^*(t)\rangle = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\alpha_k = \langle x(t), \varphi_k(t)\rangle} \quad \forall\, k = 1, \dots N$$

2.1.4 Norme et distance :

ⓐ Norme d'un signal $x(t)$:

Le produit scalaire est lié à la norme par :

$$\langle x(t), x^*(t)\rangle = \|x(t)\|^2 = \|x\|^2$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x(t), x^*(t)\rangle} \geq 0$$

Soit $x(t) \in S$ et $\{\varphi_k(t)\}_{k=1,\dots,N}$ une base orthogonale de S

alors : $\langle x(t), x^*(t) \rangle = \|x(t)\|^2 = \langle \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n(t) ; \sum_{m=1}^{N} \alpha_m^* \varphi_m^*(t) \rangle$

le produit scalaire est une opération linéaire $\Rightarrow$

$$\|x(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \langle \varphi_n(t) , \varphi_m^*(t) \rangle$$

$$\langle \varphi_n(t), \varphi_m^*(t) \rangle = 0 \quad \forall\, m \neq n \Rightarrow$$

$$\|x(t)\|^2 = \sum_{n=1} |\alpha_n|^2 \|\varphi_n(t)\|^2 .$$

Si la base est orthonormée $\|\varphi_n(t)\|^2 = 1$, $\forall_{n=1,\dots,N}$:

$$\Rightarrow \boxed{\|x(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2}$$

(b) distance de deux signaux (l'espace est métrique)

La distance $d(x,y)$ de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ est une mesure de dissemblance. Elle est nulle si les signaux sont identiques. Elle est utilisée pour comparer les signaux. (reconnaissance de forme etc...).

ex : un filtre est un dispositif qui tente à minimiser la distance $d(x,y)$ entre un signal d'entrée $x(t)$ entaché de perturbations indésirables et un signal de sortie $y(t)$ ayant des propriétés désirées.

- $d(x,y)$: nombre réel ≥ 0
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x(t) = y(t), \ \forall t$.

- Définition de la distance :

$d_1^2(x,y) = \langle x-y , x^* - y^* \rangle$, $x(t) - y(t) = e(t)$ } Signal erreur

donc : $d_1^2(x,y) = \langle e(t), e^*(t) \rangle = \|e(t)\|^2$

Rq : $\|x(t)\|^2 = \langle x, x^* \rangle = \begin{cases} E_x & \text{signaux d'énergie finie} \\ P_x & \text{signaux d'énergie infinie} \end{cases}$

$d_1^2(x,y) = \|e(t)\|^2 = \begin{cases} \text{énergie du signal erreur si } x(t) \text{ et } y(t) \in L^2 \\ \text{Puissance du signal erreur si } x(t) \text{ et } y(t) \notin L^2 \end{cases}$

La distance euclidienne de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ définie sur un intervalle de temps T est donnée par :

$$\boxed{d_1^2(x,y) = K \int_T |x(t) - y(t)|^2 \, dt}$$

$K = 1$ si S est un espace de L_2

$K = \frac{1}{T}$ dans le cas contraire (si S n'est pas un espace de L_2)

$d_1^2(x,y)$ appelée distance euclidienne ou distance en moyenne quadratique, cette distance est la plus utilisée

- autre définition :

- $d_2(x,y) = K \int_T |x(t) - y(t)| \, dt = K \int_T |e(t)| \, dt$

$$K = \begin{cases} 1 & \text{si } S = L_2 \\ \frac{1}{T} & \text{si non.} \end{cases}$$

Cette distance ne repose pas sur la norme quadratique de l'erreur mais sur le module uniquement.

- $d_3(x,y) = K \int_T |\operatorname{Sgn}\{x(t) - \bar{x}\} - \operatorname{Sgn}\{y(t) - \bar{y}\}| \, dt$

$$\operatorname{Sgn} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \left\{ \operatorname{Sgn}(x(t)) - \bar{x} = \begin{cases} 1 & x(t) \geq \bar{x} \\ -1 & x(t) < \bar{x} \end{cases} \right.$$

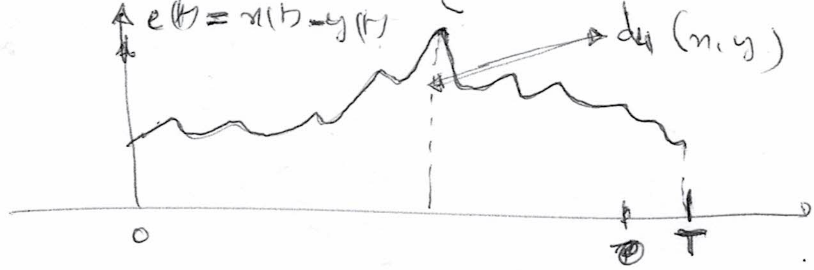
$\bar{x}$ = valeur moyenne du signal $x(t)$

$\bar{y}$ = " " " " $y(t)$.

mêmes remarques pour le coefficient K

- $d_4(x,y) = \sup\{|x(t)-y(t)|,\ t \in T\}$

$= \sup\{|e(t)|,\ t \in T\}$



c) Relation norme / distance :

$$d_1^2(x,y) = \|e(t)\|^2 = \langle e(t), e^*(t)\rangle = \langle x-y, x^*-y^*\rangle$$
$$= \langle x,x^*\rangle + \langle y,y^*\rangle - \langle x,y^*\rangle - \langle y,x^*\rangle$$

on a : $\langle y,x^*\rangle = \left[\langle y,x^*\rangle^*\right]^* = \underbrace{\langle y^*,x\rangle^* = \langle x,y^*\rangle^*}_{\text{propriété hermitienne du produit scalaire}}$

$$d_1^2(x,y) = \langle x,x^*\rangle + \langle y,y^*\rangle - \langle x,y^*\rangle - \langle x,y^*\rangle^*$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \left[\langle x,y^*\rangle + \langle x,y^*\rangle^*\right]$$

$$d_1^2(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y^*\rangle$$

Si $x(t) \perp y(t) \Rightarrow \langle x(t), y^*(t)\rangle = 0 \Rightarrow$

$$d_1^2(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

dans ce cas ($x(t) \perp y(t)$) La distance $d_1(x,y)$ est maximale

Ce qui veut dire que la distance est inversement proportionnelle au Taux de Similitude ou de ressemblance entre les deux signaux.

Si $x(t) \equiv y(t) \Rightarrow d_1^2(x,x) = \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,x^*\rangle$

$$= \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\|x\|^2$$
$$= 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0$$

Ressemblance

$$\Rightarrow d_1^2(x,y) = 0$$

- Cas des signaux $\in L_2$: { les signaux à énergie finie }

$$d_1^2(x,y) = E_x + E_y - 2\,\mathrm{Re}\, E_{xy}$$

parceque dans le cas des signaux $\in L_2$, la norme c'est l'énergie.

dans le cas contraire (les signaux $\notin L_2$)

$$d_1^2(x,y) = P_x + P_y - 2\,\mathrm{Re}\, P_{xy}$$

- Relation de SCHWARTZ :

$$\langle x, x^* \rangle . \langle y, y^* \rangle \geq \langle x, y^* \rangle \langle y, x^* \rangle$$

à demontrer ?

Pour demontrer ça, on considère la distance $d_1^2(x, ky)$ } k = cte $\in \mathbb{C}$

Par définition, la distance est positive ou nulle.

$d_1^2(x, ky) \geq 0$ { $\forall x, y$ et $k \in \mathbb{C}$.

$$d_1^2(x, ky) = \langle x, x^* \rangle + \langle ky, k^*y^* \rangle - \langle x, k^*y^* \rangle - \langle ky, x^* \rangle$$

$$= \langle x, x^* \rangle + kk^* \underbrace{\langle y, y^* \rangle}_{\text{produit scalaire et linéaire}} - k^* \langle x, y^* \rangle - k \langle y, x^* \rangle$$

Ceci est vraie $\forall k$

Si on prend $k = \dfrac{\langle x, y^* \rangle}{\langle y, y^* \rangle}$ = cte $\in \mathbb{C}$

alors : $d_1^2(x,ky) = \langle x, x^* \rangle + \dfrac{\langle x, y^* \rangle}{\cancel{\langle y, y^* \rangle}} \dfrac{\langle x, y^* \rangle^*}{\langle y, y^* \rangle^*} \cancel{\langle y, y^* \rangle}$

$- \dfrac{\langle x, y^* \rangle^*}{\langle y, y^* \rangle^*} \langle x, y^* \rangle - \dfrac{\langle x, y^* \rangle}{\langle y, y^* \rangle} \langle y, x^* \rangle \geq 0$

$$d_1^2(x, ky) = \langle x, x^* \rangle - \frac{\langle x, y^* \rangle \langle y, x^* \rangle}{\langle y, y^* \rangle} \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle x, x^* \rangle . \langle y, y^* \rangle \geq \langle x, y^* \rangle \langle y, x^* \rangle$$

C.Q.F.D