Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna

Module : T.S

3ème Année Licence Télécom :

TD n° 1

exercice n° 1 : Classifiez les signaux suivants en calculant leurs énergie ou leurs puissance.

a- $x(t) = A e^{-\alpha t} u(t)$, avec $\alpha > 0$ et $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

b- $x(t) = \cos t + 3 \cos 2t$

c- $x(t) = e^{-\alpha |t|}$, $\alpha > 0$

exercice n° 2 : Soient les signaux $x(t) = \sin 2\pi f t$ et $y(t) = \cos(2\pi f t + \varphi)$.

a- Calculez l'énergie de ces signaux.

b- Calculer la puissance moyenne d'interaction entre x et y.

c- tracez la courbe de puissance d'interaction P_{xy} en fonction de φ.

exercice n° 3 : Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux quelconques d'énergie finie, et soit $z(t) = x(t) + y(t)$.

a- Déterminez E_z. Quelle est la condition pour laquelle on a : $E_z = E_x + E_y$

b- même question pour $x(t)$ et $y(t)$ d'énergie infinie

c- Déterminer la puissance du signal : $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n \omega_0 t)$.

Solution du TD 1 :

exercice n° 1 (Solution) :

ⓐ- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} A^2 e^{-2\alpha t}\, dt$

$E_x = -\frac{A^2}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \boxed{\frac{A^2}{2\alpha}}$, le Signal est à énergie finie

$P_x = \frac{dE_x}{dt} = 0$! donc à puissance moyenne nulle.

ⓑ- $x(t) = \cos t + 3\cos 2t$. $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

$\frac{2\pi}{T_1} = \omega_1 = 1 \Rightarrow \boxed{T_1 = 2\pi}$ et $\omega_2 = 2 \Rightarrow \boxed{T_2 = \pi}$

Le signal $x(t)$ est un signal périodique (énergie infinie) donc on calcule la puissance.

$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x^*(t)\, dt =$

Choix de la période : on prend ppmc $(T_2, T_1) = T_1 = 2\pi$

donc $P_x = \lim_{T_1 \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} (\cos t + 3\cos 2t)^2 dt$ et comme :

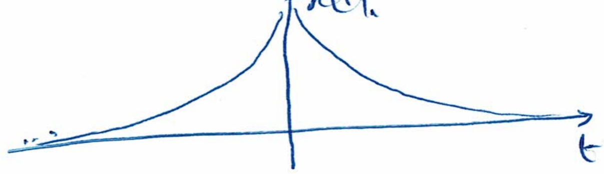
$x(t)$ est pair $\Rightarrow P_x = \lim_{T_1 \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} (\cos^2 t + 9\cos^2(2t) + 6\cos t \cos 2t)\, dt$

$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ et $\cos t \cos 2t = \frac{\cos t + \cos 3t}{2}$.

donc : $P_x = \lim_{T_1 \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt + \frac{9}{2} \int_0^{\frac{T_1}{2}} \frac{\cos 4t + 1}{2}\, dt$

$+ \frac{6}{2} \int_0^{\frac{T_1}{2}} (\cos t + \cos 3t)\, dt = \lim_{T_1 \to \infty} \left[\frac{T_1}{2} + \frac{9}{2} T_1 \right] = 5$

c) $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) . x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\alpha|t|}|^2 dt$



$e^{-\alpha|t|} = e^{\alpha t}$ si $t<0$

$e^{-\alpha|t|} = e^{-\alpha t}$ si $t>0$

$$E_x = \int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha t}\Big|_{-\infty}^{0} + \left(-\frac{1}{2\alpha}\right) e^{-2\alpha t}\Big|_{0}^{\infty}\right.$$

$E_x = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} = \boxed{\frac{1}{\alpha}}$, le signal est à energie finie

<u>exercice n° 2 (Solution)</u>

a) Calcul de l'energie.

$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) . x^*(t)\, dt$. $x^*(t)$: Conjugue de $x(t)$.

$f = \frac{1}{T}$.

$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin 2\pi f t . \sin 2\pi f t\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 2\pi f t\, dt$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ donc $E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1-\cos(4\pi f t)}{2} dt$

$E_x = \lim_{T\to\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} dt - \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 4\pi f t\, dt}_{0}\right] \Rightarrow E_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim \frac{1}{2} . (T)$

$E_x \to \infty \Rightarrow$ le signal $x(t)$ est à energie <u>infinie</u>

de même pour $y(t)$

$E_y = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(2\pi f t + \varphi)\, dt$ ...

$$E_y = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\cancel{\frac{\cos 4\pi f t}{2}}}_{0}\right) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{t}{2}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \to \infty$$

$y(t)$ est à energie <u>infinie</u>

(b) Calcul de la puissance moyenne d'interaction

$$E_{xy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, y^*(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin 2\pi f t \cdot \cos(2\pi f t + \varphi)\, dt$$

$$\cos x \sin y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

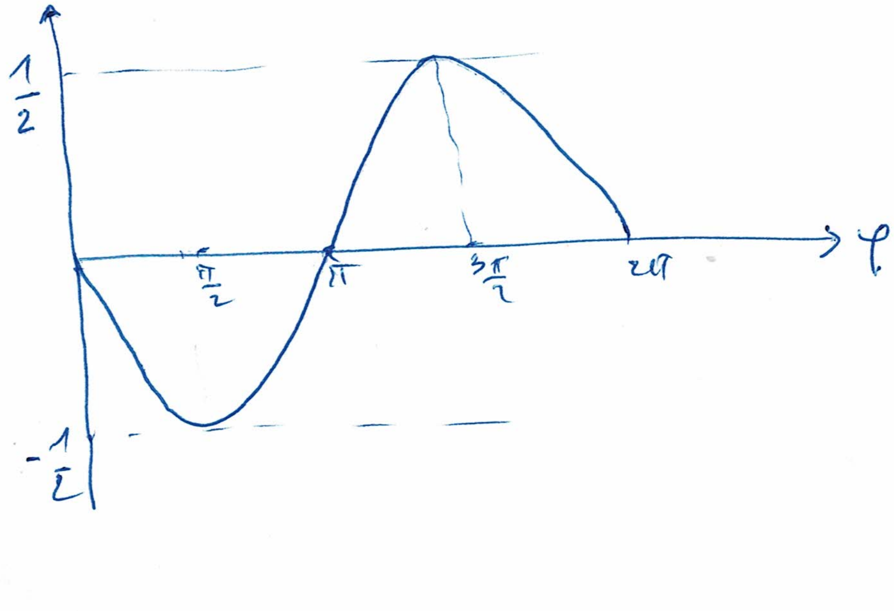
alors : $$E_{xy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\underbrace{\cancel{\sin(4\pi f t + \varphi)}}_{0} + \sin(-\varphi)}{2}\, dt$$

$\Leftrightarrow$

$$E_{xy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(-\varphi) = \lim_{T\to\infty} \left| -\frac{1}{2T} \sin\varphi\, t \right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{2\cancel{T}} \sin\varphi \cdot \cancel{T} = \boxed{-\frac{1}{2}\sin\varphi}$$

(c) La Courbe de puissance.



Exercice n° 4 (Solution)

$$z(t) = x(t) + y(t) \Rightarrow E_z(t) = z(t) \cdot z^*(t) : \text{energie instantanée}$$

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \cdot z^*(t)\, dt : \text{energie totale}$$

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + y(t))(x(t) + y(t))^*\, dt$$

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t)\, dt + \int_{-\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt + \int_{-\infty} y(t) \cdot x^*(t)\, dt + \int_{-\infty} y(t)\, y^*(t)\, dt$$

$$E_z = E_x + E_{xy} + E_{yx} + E_y ,$$

pour que $E_z = E_x + E_y$ il faut que $E_{xy} = E_{yx} = 0$.

L'energie est une quantité positive.

(b) $x(t)$ et $y(t)$ sont des signaux à energie infinie
dans ce cas, on calcule la puissance.

$$P_z = \int_{-\infty}^{\infty} P_z(t) = P_x + P_y + P_{xy} + P_{yx}$$

$P_z = P_x + P_y$ ssi $P_{xy} = P_{yx} = 0$

$\Rightarrow x(t) \perp y(t)$

C.à.d : x(t) est orthogonal à y(t)

(c) $$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$$

Soit $P_s = P_s(0,T)$ signaux periodiques de période T.

en utilisant la formule des puissances:

$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t)$, avec $S_n(t) = a_n \cos n\omega_0 t$

C'est à dire. $S(t) = S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) + \dots S_n(t) + \dots$

alors : $P_S = \sum_{n=0}^{\infty} P_{S_n} + \sum_{n=0}^{m} \sum_{m=0}^{\infty} P_{S_n S_m}$

$\forall n, m$,

- calcul de $P_{S_n S_m}$ $\qquad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$P_{S_n S_m} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_n a_m \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

donc

$$P_{S_n S_m} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n a_m \frac{\cos(n+m)\omega_0 t + \cos(n-m)\omega_0 t}{2} \, dt \to 0$$

$P_{S_n S_m} = 0$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T_0}$

Calcul de P_{S_n} :

$$P_{S_n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T_0}{2}} S_n S_n^* \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n^2 \cos^2 n\omega_0 t \, dt$$

$$P_{S_n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n^2 \frac{\cos 2n\omega_0 t + 1}{2} \, dt = \lim_{T\to\infty} a_n^2 \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \, dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 2n\omega_0 t \, dt \right] \to 0$$

$$P_{S_n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{T}} \frac{a_n^2}{2} \cancel{T} = \frac{a_n^2}{2}$$

alors $P_S = \sum_{n=0}^{\infty} P_{S_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{2} = \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + \dots \frac{a_n^2}{2} + \dots$