Master I S II Syst de Télécom TD II

Module : T.N.S

Ex N° 1 :

Soit $x(t)$ un signal transitoire analogique défini par :

$$x(t) = \begin{cases} 10 \sin\left(\frac{2\pi}{10} t\right) & |t| \leqslant 2,5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Déterminer la séquence $x(n)$ obtenue par conversion analogique - numérique de $x(t)$ sachant :

- pas d'échantillonnage $T_e = 0,5$
- erreur maximale admissible $e_{max} = 0,1$
- CAN avec approximation par arrondi
- Code binaire avec bit de plus fort poids (MSB) réservé au signe : MSB = 0 $\rightarrow$ + $x(n) \geqslant 0$
  MSB = 1 $\rightarrow$ - $x(n) < 0$

Ex N° 2 :

Soient $S_1 = L^2$: classe de séquences d'énergie finie

et S_2 : classe de séquences périodiques de période N donné

1) Montrer que S_1 et S_2 forment deux espaces vectoriels de séquences.

2) Soient $x(n)$ et $y(n)$ deux séquences définies par :

$$x(n) = \begin{cases} e^{-\alpha n} & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad y(n) = \begin{cases} 2 & 0 \leqslant n \leqslant \frac{N-1}{2} \\ -1 & \frac{N-1}{2} \leqslant n < 0 \\ \text{périodique ailleurs} \\ \text{de période N impair} \end{cases}$$

a) Déterminer les énergies totales E_x et E_y

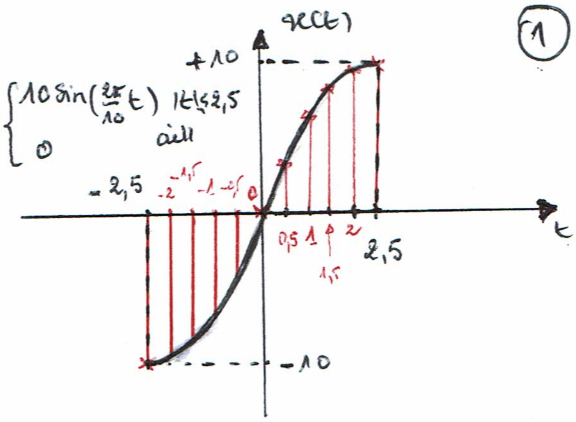
b) " les puissances moyennes sur l'axe des temps discret P_x et P_y

①

<u>Ex N° 1 Solution :</u>

$x(t) \xrightarrow{CAN} x(n)$?

$$x(t) = \begin{cases} 10\sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right) & |t| \leq 2,5 \\ 0 & \text{aill} \end{cases}$$



- Echantillonnage de $x(t) \longrightarrow x(nT_e)$

$x(-t) = -x(t)$ signal impair

$x(-nT_e) = -x(nT_e)$ $\forall n$ $\Rightarrow$ on détermine uniquement $x(nT_e)$ pour $n \geq 0$

$x(0T_e) = x(0) = 10 \cdot \sin(0) = 10 \cdot 0 = 0,00 = 0\,q$

$x(T_e) = x(0,5) = 10\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = 10 \cdot 0,3090 = 3,090 = 30,9\,q$

$x(2T_e) = x(1) = 10\sin\left(2\frac{\pi}{10}\right) = 10 \cdot 0,5877 = 5,877 = 58,77\,q$

$x(3T_e) = x(1,5) = 10\sin\left(3\frac{\pi}{10}\right) = 10 \cdot 0,8090 = 8,090 = 80,90\,q$

$x(4T_e) = x(2) = 10\sin\left(4\frac{\pi}{10}\right) = 10 \cdot 0,9510 = 9,510 = 95,10\,q$

$x(5T_e) = x(2,5) = 10\sin\left(5\frac{\pi}{10}\right) = 10 \cdot 1 = 10,00 = 100,0\,q$

$$\frac{x(nT_e)}{q} = \alpha_n \Rightarrow x(nT_e) = \alpha_n q$$

$q = 0,1 \Rightarrow x(nT_e) = \alpha_n \times 0,1$ avec $\alpha_n = 10\, x(nT_e)$

- Approximation par arrondi :

$x(0) = 0\,q$ $\quad x(T_e) \simeq 31\,q$ $\quad x(2T_e) \simeq 59\,q$

$x(3T_e) \simeq 81\,q$ $\quad x(4T_e) \simeq 95\,q$ $\quad x(5T_e) = 100\,q$

- Détermination de la capacité m bits du CAN

$-10 \leq x(t) \leq 10$ $\quad x_{max} = 10$ $\quad$ bit de plus fort poids MSB = "signe"

$\Rightarrow$ On considère $0 \leq x(t) \leq 10$ uniquement

$m = m' + \underset{\uparrow \text{bit signe}}{1}$

$(2^{m'} - 1)\,q \geq x_{max}$

$$(2^{m'} - 1) \geq \frac{x_{max}}{q} \Rightarrow 2^{m'} \geq \frac{x_{max}}{q} + 1$$

$$\Rightarrow 2^{m'} \geq \frac{10}{0{,}1} + 1 = 101 \Rightarrow m' = 7 \text{ bits} \quad (2^7 = 128)$$

$\Rightarrow$ Nbre de bits du CAN $m = m'+1 = 7+1 = 8$ bits

Ainsi : $x(n) = \alpha_n$ écrite sous forme binaire 8 bits avec MSB (2^7) = bit "signe"

	2^7 Signe	2^6 64	2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1
$x(0) = 0_{bin\ 8bits}$ →	0	0	0	0	0	0	0	0
$x(1) = 31_{bin}$ " →	0	0	0	1	1	1	1	1
$x(2) = 59_{bin}$ " →	0	0	1	1	1	0	1	1
$x(3) = 81_{bin}$ " →	0	1	0	1	0	0	0	1
$x(4) = 95_{bin}$ " →	0	1	0	1	1	1	1	1
$x(5) = 100_{bin\ 8bits}$ →	0	1	1	0	0	1	0	0

Signe +

$x(-n) = -x(n) \Rightarrow$

	Signe							
$x(-1) =$	1	0	0	1	1	1	1	1
$x(-2) =$	1	0	1	1	1	0	1	1
$x(-3) =$	1	1	0	1	0	0	0	1
$x(-4) =$	1	1	0	1	1	1	1	1
$x(-5) =$	1	1	1	0	0	1	0	0

Signe 1

Ex N° 2 : Solution :

1) $S'_1 = L^2$: Classe des séquences d'énergie finie

S'_2 : classe des séquences périodiques de période N donné

a) S'_1 est un e.v.s ssi :

- $\forall x(n) \in S'_1 \quad \forall y(n) \in S'_1 \overset{?}{\Rightarrow} z(n) = x(n) \pm y(n) \in S'_1$
- $\forall x(n) \in S'_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \overset{?}{\Rightarrow} \lambda x(n) \in S'_1$

$\forall x(n) \in S'_1 \Rightarrow E_x =$ cste finie
$\forall y(n) \in S'_1 \Rightarrow E_y =$ " "

$z(n) = x(n) \pm y(n) \Rightarrow E_z = \sum_n z(n)^2 = \sum_n (x(n) \pm y(n))^2$

$E_z = \sum_n x(n)^2 + y(n)^2 \pm 2x(n).y(n) = \sum_n x(n)^2 + \sum_n y(n)^2 \pm 2 \sum_n x(n) y(n)$

$E_z = E_x + E_y \pm 2 E_{xy}$

Comme $|E_{xy}|^2 \leq E_x E_y \Rightarrow |E_{xy}| \leq \sqrt{E_x . E_y} \Rightarrow E_{xy} =$ cste finie

$\Rightarrow E_z =$ cste $+$ cste $\pm 2 \times$ cste $=$ cste finie $\Rightarrow$

$z(n) = x(n) \pm y(n) \in S_1$

$v(n) = \lambda x(n) \Rightarrow E_v = \sum_n |\lambda x(n)|^2 = |\lambda|^2 \sum_n |x(n)|^2 =$
$|\lambda|^2 E_x =$ cste finie

$\Rightarrow S_1$ est un e.v.s.

b) S'_2 est un e.v.s. ssi :

$\forall x(n) \in S'_2 \quad \forall y(n) \in S'_2 \overset{?}{\Rightarrow} z(n) = x(n) \pm y(n) \in S'_2$
$\forall x(n) \in S'_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \overset{?}{\Rightarrow} v(n) = \lambda x(n) \in S'_2$

$\forall x(n) \in S_2' \Rightarrow x(n+kN) = x(n)$ période N $\forall k$

$\forall y(n) \in S_2' \Rightarrow y(n+kN) = y(n)$ " " "

$z(n) = x(n) \pm y(n) \Rightarrow z(n+kN) = x(n+kN) \pm y(n+kN)$

$= x(n) \pm y(n) = z(n)$

$\Rightarrow z(n)$ est périodique de période N

$\Rightarrow z(n) \in S_2'$

$\left.\begin{array}{ll}\forall x(n) \in S_2' & x(n+kN) = x(n) \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} & \end{array}\right\} v(n) = \lambda x(n)$

$\Rightarrow v(n+kN) = \lambda x(n+kN) = \lambda x(n) = v(n)$

$v(n+kN) = v(n) \Rightarrow v(n) = \lambda x(n) \in S_2'$

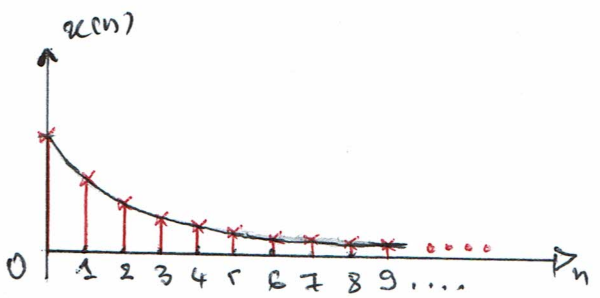
$\Rightarrow S_2'$ est un e.v.s.

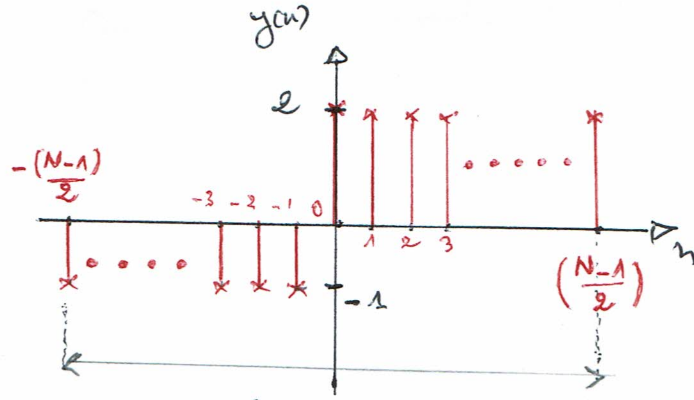
2 Energies et Puissances de $x(n)$ et $y(n)$

$$x(n) = \begin{cases} e^{-\alpha n} & n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

$$y(n) = \begin{cases} 2 & \left(0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}\right) \\ -1 & \left(-\frac{N-1}{2} \leq n < 0\right) \end{cases}$$

Périodique ailleurs de période N impair donné





période de $y(n)$
$= N$ échantillons

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\alpha n})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2\alpha})^n$$ Prog. géom de raison $e^{-2\alpha}$ de 1er terme $(n=0) = 1$

$$\Rightarrow E_x = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-2\alpha n}}{1-e^{-2\alpha}} = \frac{1}{1-e^{-2\alpha}}$$ Car $\lim_{n\to\infty} (e^{-2\alpha})^n = 0$ $\quad (e^{-2\alpha} < 1)$

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2(n) = \sum_{\substack{\text{infinité}\\ \text{de périodes}}} E_{y\,\text{d'une période}}$$

$$E_{y\,\text{période}} = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} y^2(n) = \sum_{-\frac{N-1}{2}}^{-1} (-1)^2 + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2^2 = \sum_{-\frac{N-1}{2}}^{-1} 1 + 4 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 1$$

$$= \frac{N-1}{2} + 4\left(\frac{N-1}{2} + 1\right) = \frac{N-1}{2} + 4\,\frac{N-1}{2} + 4$$

$$= 5\left(\frac{N-1}{2}\right) + 4$$ avec N période de $y(n)$

$$E_y = \sum_{\substack{\text{sur une}\\ \text{infinité}\\ \text{de périodes}}} E_{y\,\text{période}} = \sum_{\substack{\text{une}\\ \text{infinité}\\ \text{de fois}}} \left[5\left(\frac{N-1}{2}\right) + 4\right] = \infty$$

Puissances : P_x et P_y

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2(n) = \frac{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} x^2(n)}{\lim_{N\to\infty} (2N+1)} = \frac{E_x}{\lim_{N\to\infty}(2N+1)}$$

$$= \frac{\text{cste}}{\infty} = 0$$

$$P_y = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} y^2(n) = \frac{1}{N} E_{y\,\text{période}} = \frac{1}{N}\left[5\left(\frac{N-1}{2}\right) + 4\right]$$

avec N période de $y(n)$