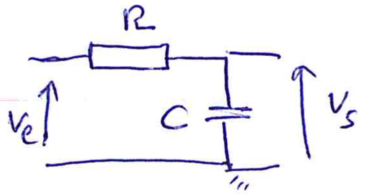
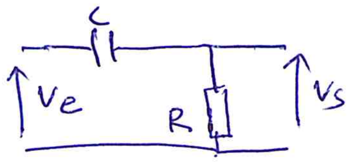
Les filtres

exercice n° 1 ⓐ Soit le filtre analogique suivant :



- Calculer $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$. quel est le type de ce filtre

ⓑ même questions pour le filtre suivant :



Solution : ⓐ $V_e = R + \frac{1}{jC\omega}$, $V_s = \frac{1}{jC\omega}$ (régime sinusoïdal)

$$H(j\omega) = \frac{1/jC\omega}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad , \text{avec } \omega_c = \frac{1}{RC}$$

et on a la forme canonique d'un filtre passe bas 1^er ordre

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad , \text{alors :}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \Rightarrow K = 1 \ , \ \omega_c = \frac{1}{RC}.$$

le filtre est un passe-bas, 1^er ordre

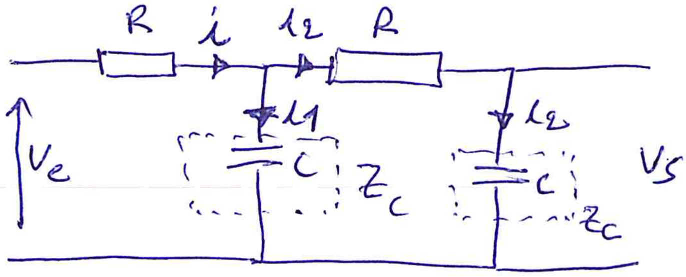
ⓑ $V_e = \frac{1}{jC\omega} + R$, $V_s = R \Rightarrow H(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}$

$$H(j\omega) = \frac{jCR\omega}{1 + jCR\omega}$$

La forme canonique d'un filtre passe haut premier ordre est :

$$H(j\omega) = K\frac{jCR\omega}{1 + jCR\omega} \Rightarrow K = 1 . \ \omega_c = \frac{1}{RC}$$

donc le filtre est un passe-haut 1^er ordre exercice n° 2 Soit le filtre suivant :



- Calculer $H(j\omega)=\frac{V_s}{V_e}$ et déduire le type et l'ordre du filtre.

Solution

$$i = i_1 + i_2$$

$$V_e = Ri + Z_c i_1 = R(i_1+i_2) + Z_c i_2 = (R+Z_c)i_1 + R i_2 \quad \dots (1)$$

$$Z_c i_1 = (R+Z_c) i_2 \Rightarrow i_1 = \frac{R+Z_c}{Z_c} i_2 \quad \dots (2)$$

$$V_s = Z_c i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{V_s}{Z_c} \quad \dots (3)$$

on remplace (2) dans (1)

$$V_e = \frac{(R+Z_c)^2}{Z_c} i_2 + R i_2 = \left(\frac{(R+Z_c)^2 + R}{Z_c}\right) i_2$$

$$V_e = \left(\frac{(R+Z_c)^2 + RZ_c}{Z_c}\right)\frac{V_s}{Z_c} = \left(\frac{R^2+2RZ_c+Z_c^2+RZ_c}{Z_c^2}\right)V_s$$

$$V_e = \left(\frac{R^2+3RZ_c+Z_c^2}{Z_c^2}\right)V_s = \left(\frac{R^2}{Z_c^2}+\frac{3R}{Z_c}+1\right)V_s \ , \quad Z_c = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1+3\frac{R}{Z_c}+\frac{R^2}{Z_c^2}} \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_c}{Z_c+3R+\frac{R^2}{Z_c}}$$

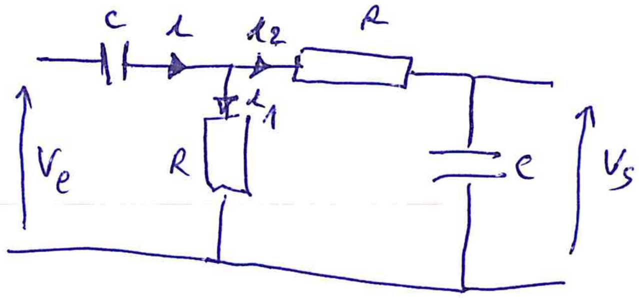
$$\boxed{H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1+3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}}$$

il est de la forme : $\frac{K}{1+2mj\frac{\omega}{\omega_c}+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$

c'est un filtre passe bas du 2ème ordre avec :

$K = 1$, $\omega_c = \frac{1}{RC}$ et $2m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

exercice n° 3 Soit le filtre suivant :



• déterminer $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ et déduire le type et l'ordre du filtre.

Solution :

$$V_e = Z_C i + R i_1 \quad , i = i_1 + i_2$$

$$V_e = Z_C(i_1 + i_2) + R i_1 = (Z_C + R) i_1 + Z_C i_2$$

et $R i_1 = (R + Z_C) i_2 \Rightarrow i_1 = \frac{(R+Z_C)}{R} i_2$ et $i_2 = \frac{V_s}{Z_C}$

donc : $V_e = \frac{(R+Z_C)^2}{R} i_2 + Z_C i_2 = \left(\frac{(R+Z_C)^2 + Z_C R}{R}\right)\frac{V_s}{Z_C}$

$$V_e = \frac{R^2 + 2RZ_C + Z_C^2 + Z_C R}{R} \cdot \frac{V_s}{Z_C} = \frac{R^2 + 3Z_C R + Z_C^2}{R} \cdot \frac{V_s}{Z_C}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{RZ_C}{R^2 + 3RZ_C + Z_C^2} \underset{\text{par } Z_C^2}{\overset{\text{divise}}{=}} \frac{\frac{RZ_C}{Z_C^2}}{\frac{R^2}{Z_C^2} + \frac{3RZ_C}{Z_C^2} + \frac{Z_C^2}{Z_C^2}} = \frac{\frac{R}{Z_C}}{1 + \frac{3R}{Z_C} + \frac{R^2}{Z_C^2}}$$

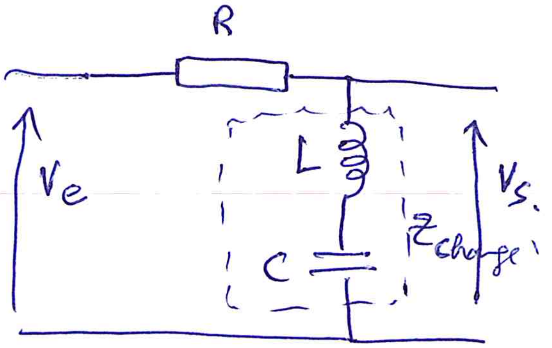
on multiplie par 3 et on divise par 3.

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{3} \cdot \frac{jRC\omega \cdot 3}{1 + 3jRC\omega \text{ [redacted] } R^2C^2\omega^2} = \frac{1}{3} \frac{j3RC\omega}{1 + j(3RC\omega) \text{ [redacted] } R^2C^2\omega^2}$$

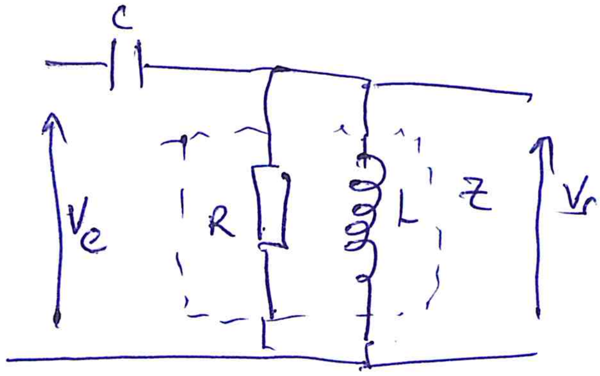
$K = 1$, $2m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$ filtre passe bande 2ème ordre

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

exercice n° 4   Soient les deux filtres suivants :



et



- Déterminer $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$.
- déduire le type et l'ordre du modèle.

Solution :

H_1 : $\frac{V_s}{V_e} = \frac{Z}{R+Z}$ avec $Z = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1-LC\omega^2}{jC\omega}$

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\frac{1-LC\omega^2}{1/j\omega}}{R+\frac{1-LC\omega^2}{jC\omega}} = \frac{1-LC\omega^2}{1+jRC\omega-LC\omega^2}$$

Le filtre est un filtre coupe-bande

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $2m = \omega RC \Rightarrow m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

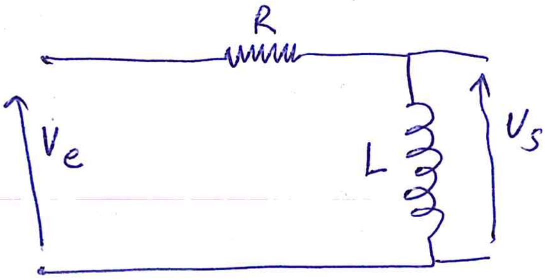
H_2

$$\frac{V_s}{V_e} = H(j\omega) = \frac{\frac{jL\omega R}{R+jL\omega}}{\frac{R+jL\omega+jRLC^2\omega^2}{jC\omega(R+jL\omega)}} = \frac{-LC\omega^2}{1+j\frac{L}{R}\omega-LC\omega^2}$$

~~[illegible]~~ filtre passe haut 2ème ordre.

$K = 1$, $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

exercice n°: A Soit le filtre suivant :



1 - donne la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ et mettre cette fonction sous forme canonique. Quel est son type et l'ordre.

2 - donne l'expression de la fréquence de coupure.

3 - Calculer la sortie V_s pour $V_e = 10V$, $R = 1k\Omega$

$L = 0{,}2$ Henry ~~et pour~~ @ f_c

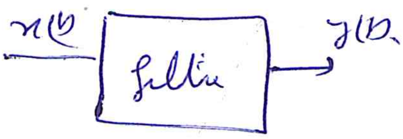
a - si la fréquence à l'entrée $f = \frac{f_c}{10}$

b - " " " " $f = 10 \cdot f_c$

4 Trace le diagramme de Bode.

Solution :

1



$$\frac{V_s}{V_e} = H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{\tau j\omega}{1 + j\tau\omega} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

. La forme canonique d'un filtre passe bas : $H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$

" " " passe ~~haut~~ haut : $H(j\omega) = \frac{K\, j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$

dans notre cas : le filtre est un passe haut ($\boxed{K = 1}$)

il est du 1er ordre.

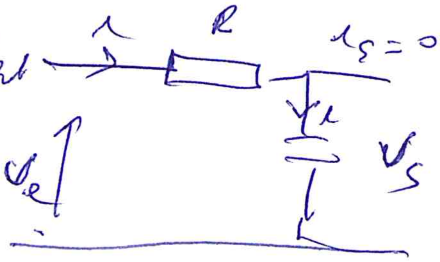
2 La fréquence de coupure est définie pour $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\omega = 2\pi f$. $\quad \omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\frac{L}{R}} = \frac{R}{L} \Rightarrow f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \boxed{\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\tau}}$

$\tau = \frac{L}{R} = 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow f_c = 795$ Hz.

exercice

1) exprimer la fonction de transfert sous la forme canonique



2. donner l'ordre du filtre

3. donner l'expression de la fréquence de coupure f_c

4. calculer la tension de sortie V_s si la fréquence de la tension d'entrée égale à $\frac{f_c}{10}$ ou $10 f_c$.

5) tracer le diagramme de Bode

$V_e = 10V$

$R = 1k\Omega$

$C = 20\,mF$

1. $$H(j\omega) = \frac{1}{1+\tau j\omega} \quad \text{avec } \tau = RC$$

2. ordre du filtre = 1er ordre

3. $$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{on} \quad \omega_c = \frac{1}{\tau}, \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$f_c = 7{,}9577 \text{ Hz}$$

7957,7

4) $$\frac{V_s}{V_e} = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \Rightarrow V_s = \frac{1}{\sqrt{1+2\pi\tau f}} V_e$$

si $f = \frac{f_c}{10} \Rightarrow V_s = 9{,}95\,V$.

$f = 10 f_c \Rightarrow V_s = 0{,}99$

5