La transformée de Fourier discrète

"TFD"

Pour traiter un signal $x(t)$ continu à l'aide d'un calculateur il faut le discrétiser (rendre $x(t)$ compatible avec le monde numérique). de même pour traiter la Transformée de Fourier $X(f) = TF\{x(t)\}$ par un procédé numérique on doit convertir $X(f)$ en une séquence en fréquence $\{X(k)\}$

Soit : $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt$

La valeur rapprochée de cette intégrale est une somme d'airs de rectangles de durée T_e.

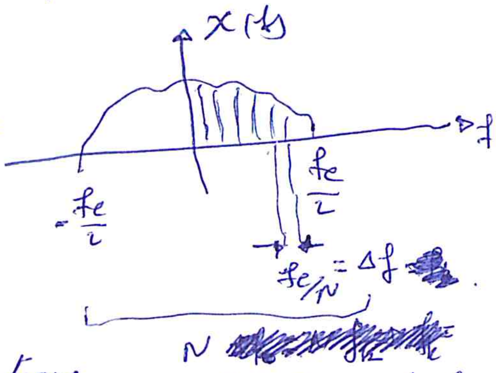
En limitant la durée d'intégration à l'intervalle $[0.(N-1)T_e]$

on obtient : $X(f) \approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)\, e^{-j2\pi f n T_e}$

avec $f_k = k\Delta f = k\frac{f_e}{N}$

$X(k\Delta f) = X(f_k) \approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)\, e^{-j2\pi \frac{n}{N} k \frac{f_e}{f_e} T_e}$

$X(f_k) \approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)\, e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$



$f_k = k\Delta f = k\frac{f_e}{N}$

c'est une approximation utilisée en pratique sous le nom de TFD. Elle est utilisée lorsqu'on travaille avec des suites numériques sans lien avec un signal physique.

<u>Définition</u> : on appelle TFD d'une suite de N Termes $x(0), x(1), x(2) \ldots x(N-1)$, la suite de N Termes $X(0), X(1), X(2) \ldots X(N-1)$.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}.$$

Les N termes $x(n)$ sont les N échantillons d'un signal analogique échantillonné ; $x_n = x(nT_e)$.

Les N Termes X(k) correspondre à une approximation (à un facteur multiplicatif Te près), de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $f_k = \frac{k f_e}{N}$ avec k entre 0 et N-1.

L'inverse de la TFD

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi nk}{N}}.$$

Car: soit: $A = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi nk}{N}}$, remplaçons X(k) par sa valeur

$$A = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x(i)\, e^{-\frac{j2\pi ik}{N}} \right) e^{\frac{j2\pi nk}{N}}$$

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi(n-i)k}{N}} \right)$$

$1 - \cos + j\sin$ $= 0$

si $i \neq n$ $\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi(n-i)k}{N}} = \frac{1 - e^{\frac{j2\pi(n-i)}{N}.N}}{1 - e^{\frac{j2\pi(n-i)}{N}}} = 0$

si $i = n$ $\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi(\cancel{n-i})k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi(n-i)k}{N}} \right)}_{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i).N$$

$$= \frac{1}{N} x(n).N$$

$A = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i).N \Rightarrow$ pour $n = i$ uniquement $\Rightarrow A = \frac{1}{N} x(n) N = \boxed{x(n)}$

car $A = \frac{1}{N} \left(\underset{0}{\cancel{x(0)}} + \underset{0}{\cancel{x(1)}} + \dots \underset{1}{x(n)} + \dots \underset{0}{\cancel{x(N-1)}} \right]$

Convolution

Déf : on appelle Produit de Convolution de deux signaux analogiques appartenant à L^2 $x(t)$ et $h(t)$

le signal : $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, h(t-\tau)\, d\tau$.

La Sommation sous l'intégrale s'effectue sur la Variable τ. le signal obtenu est une fonction de t et non pas un nombre comme dans le cas du produit Scala

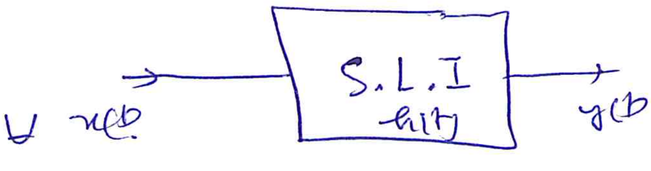
Convolution : - Conserver le 1er signal.
- rabattement du signal (2e signal) / à l'axe des ordonnées
- décalage du second signal.
- multiplier les deux signaux et intégrer le résultat

La Convolution est : Commutative : $x(t) * g(t) = g(t) * h(t)$

posons $(t-\tau) = t'$ ..

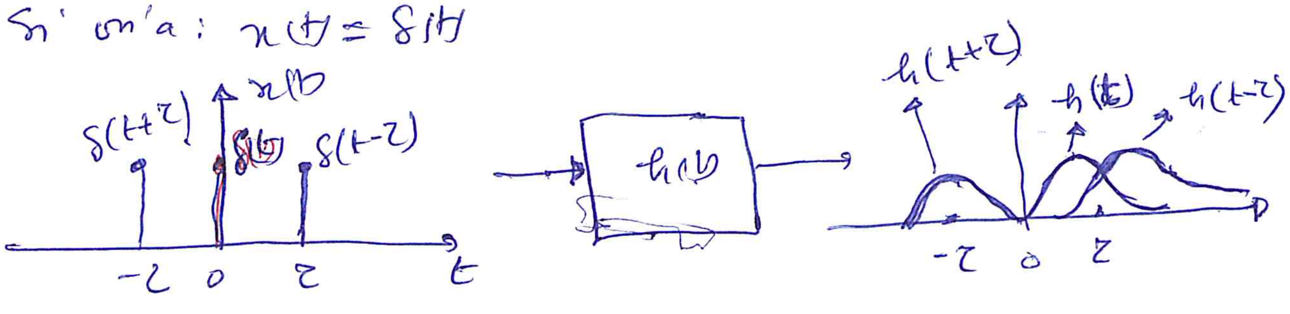
associative : $x(t) * (h(t) + g(t)) = (x * h) * g$

Soit un système LIT

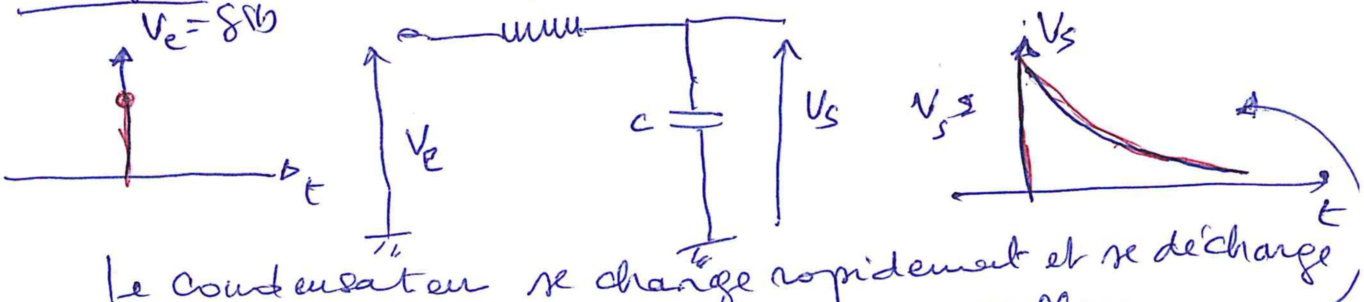


$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, h(t-\tau)\, d\tau$

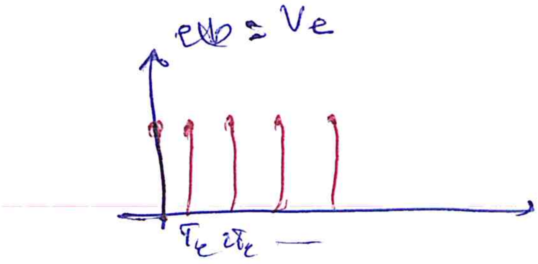
Si on a : $x(t) = \delta(t)$

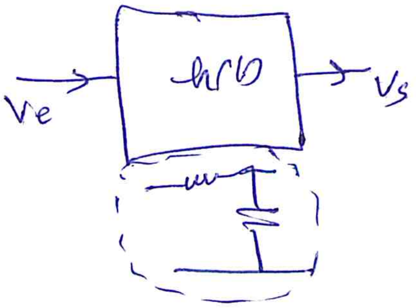


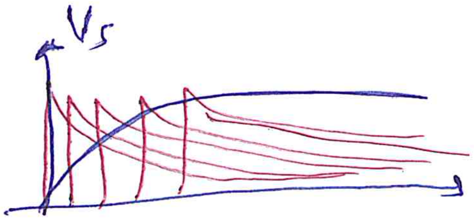
exemple

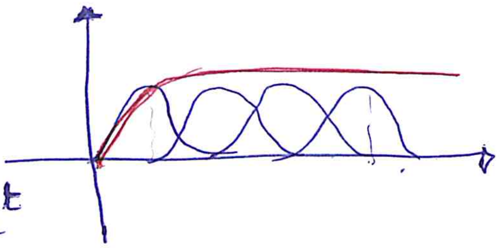


Le Condensateur se charge rapidement et se décharge on aura l'allure maintenant si on a à l'entrée un peigne de dirac





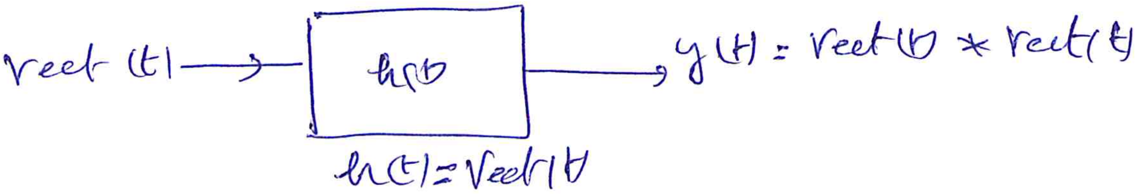


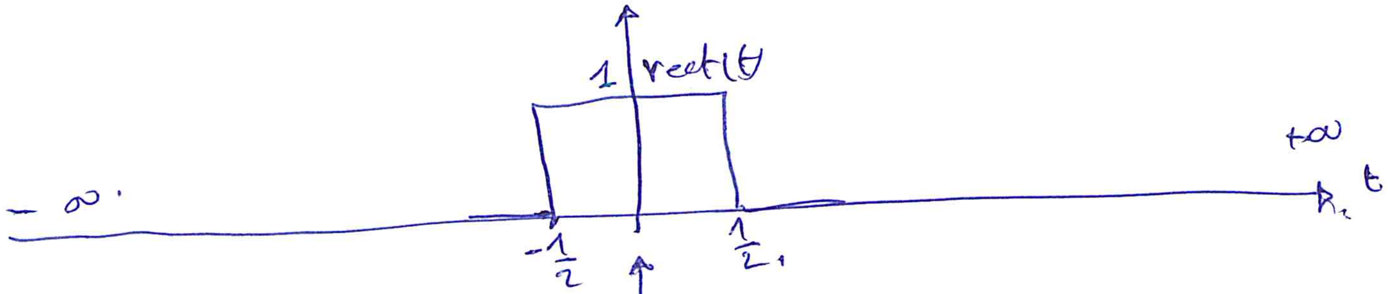


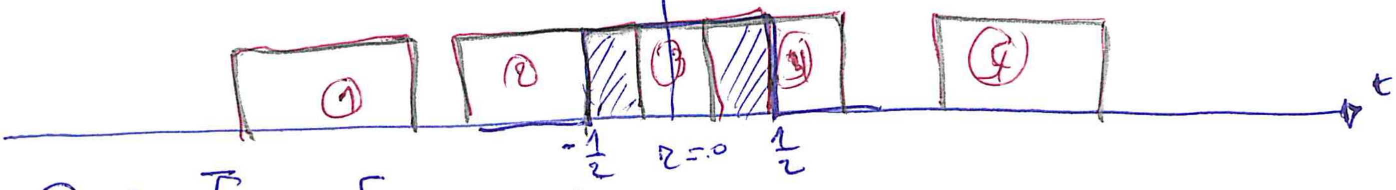
donc pour peigne de Dirac on a:

$V_e(t) = \sum \delta(t - nT_e) \longrightarrow V_s(t) = \underline{1 - e^{-\frac{1}{RC}t}}$

<u>exemple 2</u> : l'entrée est un <u>rect(t)</u>







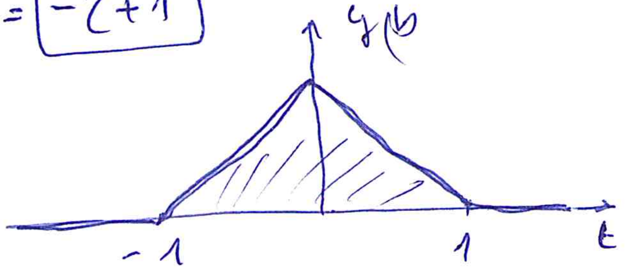
① $\tau \in]-\infty, -1[\Rightarrow y(t) = 0$

② $\tau \in [-1, 0[\Rightarrow y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} 1.d\tau = \boxed{\tau + 1}$

③ $\tau = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau = \boxed{1}$

④ $\tau \in]0, 1] \Rightarrow y(t) = \int_{-\frac{1}{2}+\tau}^{\frac{1}{2}} 1.d\tau = \boxed{-\tau + 1}$

⑤ $\tau \in]1, \infty[\Rightarrow y(t) = 0$



<u>y(t) = tri(t)</u>

Corrélation

La fonction de corrélation est utilisée pour mesurer la ressemblance entre deux signaux (leurs corrélation), et de mesurer le temps d'émission ; mesurer des distances ou encore extraire des signaux noyés dans des bruits, (Radar, Sonar, GPS, ...). ⑳

Dans chaque opération, on dispose de deux signaux un signal de référence $x(t)$ et le signal à analyser $y(t)$. L'opération mathématique de cette fonction est donnée par :

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

C'est l'intégrale du produit des signaux que l'on décale progressivement l'un par rapport à l'autre [20].

donc, la fonction d'intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ est :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

posons $t' = t+\tau \Rightarrow r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t'-\tau)\, y(t')\, dt' = \int_{-\infty}^{\infty} y(t')\, x(t'+(-\tau))\, dt$

$$= r_{yx}(-\tau) \dots ①$$

La fonction $r_{xy}(\tau)$ est la version retournée de $r_{yx}(\tau)$ autour de l'ordonné oy.

$$\boxed{r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)}$$

On peut mentionner aussi que les fonctions ~~d~~ d'intercorrélation et de convolution sont reliés entre elles par :

$$r_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(t).$$

Car : $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau.$

et $x(-t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$, posons $\begin{cases} t-\tau = t' \\ dt' = -d\tau \end{cases}$

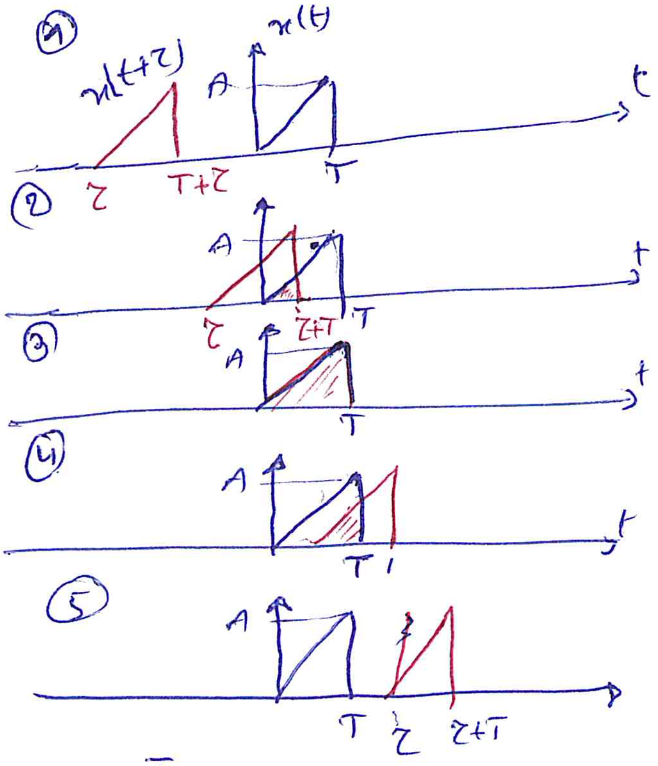
donc $x(-t) * y(t) = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t'-t)\, y(t')\, dt' = \int_{-\infty}^{\infty} x(t'-t)\, y(t')\, dt'$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(t')\, x(t' + \underbrace{(-t)}_{})\, dt' \;\ldots ②$$

Comparons ① et ② $\Rightarrow$ $\boxed{x(-t) * y(t) = r_{yx}(-\tau) = r_{xy}(\tau)}$

__exemple__ : Soit $x(t) = \begin{cases} \frac{A}{T} t & t \in [0, T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

on calcule sa fonction de correlation $r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$



__cas①__ $\tau \in]-\infty, -T[$

$r_{xx}(\tau) = 0$

cas② $\tau \in [-T, 0[$

$r_{xx}(\tau) = \int_{0}^{\tau+T} \frac{A^2}{T^2} t(t+\tau)\, dt$

$= \frac{A^2}{T^2} \left[\frac{t^3}{3} + \frac{\tau t^2}{2} \right]_0^{T+\tau}$

$= \frac{A^2}{6T^2} \left[(T+\tau)^2 (2T + 5\tau) \right].$

__cas③__ $\tau = 0 \Rightarrow r_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2} \int_0^T t^2\, dt = \frac{A^2}{3} T$

cas④ $\tau \in [0, T]$

$r_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{T} \frac{A^2}{T^2} t(t+\tau)\, dt = \frac{A^2}{T^2} \left[\frac{t^3}{3} + \frac{\tau t^2}{2} \right]_\tau^T$

$= \frac{A^2}{T^2} \left[\frac{T^3}{3} \blacksquare \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau T^2}{2} \blacksquare \frac{\tau^3}{2} \right] = \frac{A^2}{6T^2} \left[2T^3 - 2\tau^3 + 3\tau T^2 - 3\tau^3 \right]$

$= \frac{A^2}{6A^2} \left[T^2 (2T - 3\tau) - 5\tau^3 \right]$

$\tau > T$ cas⑤ $r_{xx}(\tau) = 0$