Cours d'Algèbre

Notes de cours

Dr. Benzeghli Brahim

1er avril 2020

Table des matières

Introduction

En mathématiques, une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Par exemple, la distance comprise entre deux points dans un espace euclidien à trois dimensions s'obtient en calculant la racine carrée d'une forme quadratique impliquant six variables qui sont les trois coordonnées de chacun des deux points.

Les formes quadratiques d'une, deux et trois variables sont données respectivement par les formules suivantes :

.... à rédigé

Dans ce cours d'algèbre 4, je me base essentiellement sur [?] et [?] et aussi [?] pour les près-requises.

Chapitre 1

Formes Linéaires et Dualité

Par la suite, on considère E comme un espace vectoriel sur un corps k. (k peut être égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Formes Linéaires et Espace Dual

Définition 1.1 *On appelle* ***forme linéaire*** *sur E toute application linéaire de E dans k.*

Définition 1.2 *On appelle* ***espace dual*** de E, *qu'on note par $E^* =: \mathcal{L}(E, k)$, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.*

$\varphi \in E^*$ signifie que

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & k \\ & x & \mapsto & \varphi(x) \in k \end{array}$$

de sorte que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \ \forall (\alpha, \beta) \in k^2 : \quad \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

Exemple 1.1

1. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x + y \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} E & \to & k \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

est une forme linéaire sur E, c'est ***la forme nulle*** *sur E.*

3. *Si $E = k[X]$: l'espace des polynômes à coefficients dans k, alors pour tout $x \in k$ l'application*

$$\begin{array}{rccc} ev_x : & k[X] & \to & k \\ & P(X) & \mapsto & P(x) \end{array}$$

d'évaluation de $P(X)$ en x est une forme linéaire sur $k[X]$.

4. *Si $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$: l'espace des applications réelles continues sur $[a,b]$, alors l'application*
$$\begin{array}{cccc} \int : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_a^b f(x)dx \end{array}$$
est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
5. *Si $E = \mathcal{M}_n(k)$: l'espace des matrices carrés de rang n, alors l'application*
$$\begin{array}{cccc} tr : & \mathcal{M}_n(k) & \to & k \\ & A & \mapsto & tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{array}$$
est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(k)$.
6. *Soient E une k-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. On sait que $\forall x \in E$, x s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Alors, pour chaque $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, l'application*
$$\begin{array}{cccc} e_j^* : & E & \to & k \\ & x & \mapsto & e_j^*(x) = \lambda_j \end{array}$$
*est une forme linéaire sur E, appelée la $j^{\text{ème}}$ **forme coordonnée** relative à la base $\mathcal{B}_E$.*

D'une manière plus générale, on a :

Proposition 1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

1. *Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in k^n$. L'application*
$$\begin{array}{cccc} \varphi : & k^n & \to & k \\ & x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{array}$$
est une forme linéaire sur k^n.
2. *Réciproquement : Pour tout forme linéaire φ sur k^n, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in k^n$ tel que $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in k^n$ on a : $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.*

Preuve :

1. Immédiatement par un calcul direct.
2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ la base canonique de k^n et soit $\varphi : k^n \to k$ une forme linéaire sur k^n.
On sait que tout éléments $x \in k^n$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
Donc $\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i)$.
Conclusion : Prenons pour chaque $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ $\lambda_j = \varphi(e_j)$, ce qui montre l'existence et l'unicité.

Proposition 1.2 *Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n. Alors son dual E^* est aussi de dimension finie, et on a*
$$dim(E) = dim(E^*) = n$$
.

Preuve :
On sait que k vu comme k-espace vectoriel est une droite vectorielle et donc $dim(k) = 1$.
Or
$$dim(E^*) = dim(\mathcal{L}(E,k)) = dim(E) \times dim(k) = dim(E).$$

2 Hyperplan

Définition 2.1 *Soit E un k-espace vectoriel. On appel* ***hyperplan*** *de E, le noyau de toute forme linéaire sur E autre que la forme nulle.*

ie : Une partie H de E est un hyperplan de E s'il existe $\varphi \in E^* - \{0\}$ tel que $H = Ker(\varphi)$. On dit alors que la relation $\varphi(x) = 0$ est une equation de l'hyperplan H.

Exemple 2.1

1. $H = \{A \in \mathcal{M}_n(k) \mid tr(A) = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(k)$.
2. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^3$.
3. $H = \{P \in k[X] \mid P(0) = 0\}$ *est un hyperplan de* $k[X]$.

Proposition 2.1 *Soit H un sous espace vectoriel de E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *H est un hyperplan de E.*
2. *Il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = H \oplus D$.*

Si de plus E est de dimension finie n, alors les deux propriétés précédentes sont équivalentes avec la troisième propriété suivante :

3. $dim(H) = dim(E) - 1$. (Autrement dit : H est de codimension 1).

Preuve :

(1. $\Rightarrow$ 2.) Soit H un hyperplan de E, donc il existe $\varphi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = Ker(\varphi)$. Comme φ n'est pas identiquement nulle, alors il existe $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$.
Soit la droite vectorielle $D = k.v$, et montrons que $E = H \oplus D$.
Soit $x \in H \cap D$ donc $\varphi(x) = 0$ et $\exists \lambda \in k$ tel que $x = \lambda.v$ ce qui montre que $\varphi(x) = \varphi(\lambda.v) = \lambda.\varphi(v)$ et $\varphi(v) \neq 0$ ce qui implique que $\lambda = 0$ et donc $x = 0$.
Conclusion : $H \cap D = \{0\}$.
Soit $x \in E$ et montrons que $x \in H + D$.
on a $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}$, on pose $y = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$ et on a $\varphi(y) = \varphi(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v) = 0$ donc y est un élément de H. D'où $x = y + \lambda v \in H + D$ ■

Remarque 2.1 *Si $dim(E) = n$ finie, et $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Alors, relativement à la base $\mathcal{B}_E$ un hyperplan H de E admet une equation unique, à un scalaire multiplicatif près, de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_{\mathcal{B}_E} \in E.$$

Corollaire 2.1 *Deux formes linéaires non nulles sur un espaces vectoriel E sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.*

Preuve :

Soient φ et ϕ deux formes linéaires non nulles.

Supposons que $Ker(\phi) = Ker(\varphi) = H$. Soit $v \notin H$ ce qui implique que $\phi(v) \neq 0$ et $\varphi(v) \neq 0$.

On pose $\alpha = \dfrac{\varphi(v)}{\phi(v)}$.

Soit $x \in E$, donc d'après la proposition 2.1 $E = H \oplus k.v$ et donc, il existent $y \in H$ et $\lambda \in k$ tels que $x = y + \lambda v$. D'où

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & \varphi(y+\lambda v) \\ & = & \varphi(y) + \lambda\varphi(v) \\ & = & \lambda\varphi(v) \\ & = & \lambda(\alpha\phi(v)) \\ & = & \alpha(\phi(y) + \lambda\phi(v)) \\ & = & \alpha\phi(x). \end{array}$$

Conclusion $\forall x \in E, \quad \exists \alpha \in k \quad : \varphi(x) = \alpha\phi(x)$, ce qui montre que φ et ϕ sont bien proportionnelles.

L'implication inverse est immédiate.

3 Base duale

Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Pour chaque $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, l'application

$$\begin{array}{rccl} e_j^* : & E & \to & k \\ & x & \mapsto & e_j^*(x) = \lambda_j \end{array}$$

est une forme linéaire sur E, appelée la $j^{ème}$ **forme coordonnée** relative à la base $\mathcal{B}_E$.

Proposition 3.1 *La famille $\mathcal{B}_E^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ est une base de l'espace dual E^*, appelée base duale de $\mathcal{B}_E$.*

De plus, pour tout $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, la relation d'orthogonalité de Kronecker est donnée par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Preuve :

Par définition

$$\begin{array}{rccl} e_j^* : & E & \to & k \\ & x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i & \mapsto & e_j^*(x) = \lambda_j \end{array}$$

Donc

$$\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\} : \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Soit $\varphi \in E^*$, on définit une autre forme linéaire $\phi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^*$. Pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ on a

$$\begin{array}{rcl} \phi(e_j) & = & \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^*(e_j) \\ & = & \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)\delta_{ij} \\ & = & \varphi(e_j) \end{array}$$

Les deux formes φ et ϕ coïncident sur une base de E sont donc égales. Donc

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^*$$

ce qui implique que la famille $\mathcal{B}^*$ est une famille génératrice de E^*. Et comme $dim(E) = dim(E^*) = n$ donc c'est une famille génératrice maximale, alors, c'est une base de E^*.

Corollaire 3.1 *Soient $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}_E^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ sa base duale, alors on a les relations suivantes :*

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i \tag{3.1}$$

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^* \tag{3.2}$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad a_{ij} = e_i^*(f(e_j)), \quad \text{où} \ \ (a_{ij})_{1\leq j,j\leq n} = Mat_{\mathcal{B}}(f) \tag{3.3}$$

Proposition 3.2

1. *Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, alors il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $\varphi(x) = 1$.*
2. *Pour tout vecteur x de E non nul , il existe une forme linaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$.*

Preuve :

1. Si φ une forme linéaire non nulle, alors il existe un vecteur v de E tel que $\varphi(v) \neq 0$. on pose $x = \dfrac{v}{\varphi(v)}$.
2. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ est non nul, alors il existe i_0 tel que $e_{i_0}^*(x) = x_{i_0} \neq 0$. La forme linéaire $\varphi = \dfrac{1}{e_{i_0}^*(x)} e_{i_0}^*$ convient.

Proposition 3.3 *Toute base de E^* est la base duale d'une unique base de E, appelé base pré-duale.*

Preuve :
Soit $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ une base de E^* et on pose l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & E & \to & k^n \\ & x & \mapsto & \Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)) \end{array}$$

Soit $x \in E$ un vecteur non nul. Si $x \in Ker(\Phi)$, ça implique que

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0$$

Mais la proposition 3.2 confirme l'existence d'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ de sorte que $\varphi(x) = 1$.
La forme linéaire φ s'écrit dans la base $\mathcal{F}$ de la manière $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$, ce qui donne

$$1 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

ce qui est absurde.

Conclusion $x = 0$ et le noyau de Φ est réduit à zéro, et donc l'application linéaire Φ est une injection de $E \to k^n$.

Or, $dim(E) = n = dim(k^n)$ donc, Φ est un isomorphisme.

On note par $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ la base canonique de k^n. Pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, un vecteur $v \in E$ satisfait l'équivalence suivante

$$\varphi_i(v) = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(v) = c_j$$

Comme Φ est un isomorphisme, alors la famille $\mathcal{B} = \{\phi^{-1}(c_1), \phi^{-1}(c_2), \cdots, \phi^{-1}(c_n)\}$ est une base de E est c'est l'unique famille de E satisfaisant aux conditions de Kronecker.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est l'unique base de E dont $\mathcal{F}$ est la base duale ■

Proposition 3.4 (Changement de base duale) *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases différentes de E, et soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_2$. Alors, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1^*$ vers la base $\mathcal{B}_2^*$ est ${}^tP^{-1}$.*

Preuve :

On pose

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \quad , \quad \mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \quad et \quad P = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

On note par $Q = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1^*$ vers la base $\mathcal{B}_2^*$.

Par définition de la matrice de passage, on a pour tout $1 \leq k \leq n$, $f_k = \sum_{l=1}^{n} a_{lk} e_l$ et pour tout $1 \leq j \leq n$, $f_j^* = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^*$. Donc pour tout $1 \leq j, k \leq n$ on a

$$\begin{array}{rcl} \delta_{jk} & = & f_j^*(f_k) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^* (\sum_{l=1}^{n} a_{lk} e_l) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{ij} a_{lk} e_i^*(e_l) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{ij} a_{lk} \delta_{il} \\ & = & \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{lk} \\ & = & c_{jk} \end{array}$$

Où les composantes c_{jk} sont les coefficients de la matrice ${}^tQP$, mais $\delta_{jk} = c_{jk}$, ce qui implique que ${}^tQP = I_n$ et donc $Q =^t P^{-1}$ ■

Corollaire 3.2 (♡♡♡) *Soient $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ la base canonique de E et $\mathcal{B}_c^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ sa base duale. Soient $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ une autre base de E et $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ sa base duale. Les vecteurs v_i (resp. v_i^*) étant exprimés dans la base $\mathcal{B}_c$ (resp. $\mathcal{B}_c^*$). Alors*

$$Mat_{\mathcal{B}_c^*}(\mathcal{B}^*) =^t (Mat_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}))^{-1}$$

Exemple 3.1

1. *Soient $v_1 = (-3, -1, 1), v_2 = (5, 2, -1), v_3 = (6, 2, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
   La famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice et libre donc forme une base de $\mathbb{R}^3$.
   Soit $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base duale de $\mathcal{B}$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_c^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ à $\mathcal{B}^*$ est

$$Q =^t P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ici $P = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ *).*

Donc la base duale est $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *telle que*

$$\begin{cases} \varphi_1(x;y;z) = y + 2z \\ \varphi_2(x;y;z) = -x + 3y \\ \varphi_3(x;y;z) = x - 2y + z \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \varphi_1 = e_2^* + 2e_3^* \\ \varphi_2 = -e_1^* + 3e_2^* \\ \varphi_3 = e_1^* - 2e_2^* + e_3^* \end{cases}$$

2. *Soient*

$$\begin{cases} \varphi_1(x;y;z) = x + 2y + 3z \\ \varphi_2(x;y;z) = 2x + 3y + 3z \\ \varphi_3(x;y;z) = 3x + 4y + 6z \end{cases}$$

trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$*. Dans la base canonique elles s'écrivent*

$$\begin{cases} \varphi_1 = e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^* \\ \varphi_2 = 2e_1^* + 3e_2^* + 4e_3^* \\ \varphi_3 = 3e_1^* + 4e_2^* + 6e_3^* \end{cases}$$

La famille $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *est bien une base de* $(R^3)^*$ *car la matrice*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

est inversible. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *la base de* $\mathbb{R}^3$ *pré-duale de* $\mathcal{F}$*. La matrice de passage de* $\mathcal{B}_c$ *à* $\mathcal{B}$ *est donc la matrice*

$$P =^t Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc v_1, v_2 *et* v_3 *sont les colonnes de la matrices* P*.*

4 Bidual d'un espace vectoriel

Définition 4.1 *Soit* E *un* k*-espace vectoriel. le dual de* E^* *qu'on note par* E^{**} *est appelé bidual de* E*.*

Proposition 4.1 *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & E & \to & E^{**} \\ & x & \mapsto & \Phi(x) = \left\{ \begin{array}{rccl} \tilde{x}: & E^* & \to & k \\ & \varphi & \mapsto & \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x) \end{array} \right. \end{array}$$

est un isomorphisme entre espaces vectoriels.

Remarque 4.1 *L'isomorphisme Φ permet d'identifier le bidual E^{**} à E.*

Chapitre 2

Formes Bilinéaires et Formes Quadratiques

1 Formes bilinéaires symétriques

Par la suite, on considère E comme un espace vectoriel sur un corps k. (k peut être égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1 *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & E \times E & \to & k \\ & (x,y) & \mapsto & \phi(x,y) \end{array}$$

est appelée forme bilinéaire si elle est linéaire pour chacune des deux variables.

Autrement dit :

$$\forall x_1, x_2, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in k, \quad \phi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\phi(x_1, y) + \beta\phi(x_2, y) \tag{1.1}$$

$$\forall x, y_1, y_2 \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in k, \quad \phi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\phi(x, y_1) + \beta\phi(x, y_2) \tag{1.2}$$

Remarque 1.1

— *On dit que ϕ est linéaire à gauche ou par rapport à la première variable si la relation* (1.1) *est vérifiée.*

— *On dit que ϕ est linéaire à droite ou par rapport à la deuxième variable si la relation* (1.2) *est vérifiée.*

Définition 1.2 *La forme bilinéaire ϕ est dite symétrique si*

$$\forall x, y \in E, \quad \phi(x,y) = \phi(y,x).$$

Dans la pratique, la symétrie permet de vérifier la linéarité d'un côté pour avoir la bilinéarité.

Exemple 1.1

1. *L'application multiplication*

$$\begin{array}{rccl} \tau: & k \times k & \to & k \\ & (x,y) & \mapsto & \tau(x,y) = xy \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

2. *Le produit scalaire usuel*

$$\begin{array}{rccl} \langle\ ,\ \rangle : & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & k \\ & \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) & \mapsto & \langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\rangle = x_1y_1+x_2y_2 \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

3. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \int : & \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})\times\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique. (TD)

4. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} tr : & \mathcal{M}_n(k)\times\mathcal{M}_n(k) & \to & k \\ & (A,B) & \mapsto & tr(A,B)=trace(AB) \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique. (TD)

1.1 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique

On suppose que la dimension de l'espace vectoriel E est égal à n finie. Soit $\mathcal{E}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base de E. Et soit

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E\times E & \to & k \\ & (x,y) & \mapsto & \phi(x,y) \end{array}$$

une forme bilinéaire symétrique.

Définition 1.3 *La matrice $M_{\mathcal{E}}(\phi)$ de la forme bilinéaire ϕ dans la base $\mathcal{E}$ est la matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(k)$ telle que ses coefficients sont données par*

$$\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\},\quad a_{ij}:=\phi(e_i,e_j)$$

où les indices i et j correspondent respectivement au $i^{\text{ème}}$ ligne et au $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M_{\mathcal{E}}(\phi)$.

Dans la pratique, si x et y sont deux vecteurs de E tels que leurs vecteurs colonnes des cordonnées respectifs dans la base $\mathcal{E}$ sont X et Y, alors on a

$$\phi(x,y)={}^tXM_{\mathcal{E}}(\phi)Y.$$

Inversement, on a pour toute matrice symétrique $M\in\mathcal{M}_n(k)$, l'application

$$\begin{array}{ccl} E\times E & \to & k \\ (x,y) & \mapsto & {}^tXMY \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique, où X et Y sont les vecteurs colonnes respectifs dans la base $\mathcal{E}$ des cordonnées des vecteurs x et y de E.

Exemple 1.2 *Dans la base canonique, $\begin{pmatrix}3&1\\1&-2\end{pmatrix}$ est la matrice de la forme bilinéaire symétrique $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\mapsto 3x_1y_1-2x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1.$*

On rappel ici la définition de la matrice de passage ou de changement de base.

Définition 1.4 *La matrice de passage d'une base $\mathcal{E} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ vers la base $\mathcal{E}' = (e_i')_{1\leq i\leq n}$ est la matrice $P \in GL_n(k)$ dont la $j^{ème}$ colonne est formée des coordonnées de e_j' exprimé dans la base $\mathcal{E}$.*

et on rappel aussi la proposition suivante

Proposition 1.1

1. *Soit x un élément de E. Soit X (resp. X') le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$). Alors $X = PX'$.*
2. *Soit u un endomorphisme de E, M et M' ses matrices respectives dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Alors $M' = P^{-1}MP$.*

On pose maintenant $\mathcal{E}'$ une base de E autre que la base $\mathcal{E}$. et soit P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. On a la proposition de changement de base pour les formes bilinéaires symétriques suivante :

Proposition 1.2 *La matrice de la forme bilinéaire symétrique ϕ dans la nouvelle base $\mathcal{E}'$ est*

$$M_{\mathcal{E}'}(\phi) = {}^{P}M_{\mathcal{E}}(\phi)P. \tag{1.3}$$

où $M_{\mathcal{E}}(\phi)$ est la matrice de ϕ dans la base E.

1.2 Forme bilinéaire et dualité

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique. Pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi(x,.): & E & \to & k \\ & y & \mapsto & \phi(x,y) \end{array} \tag{1.4}$$

est une forme linéaire vue comme application de la variable y (La variable x est fixé).
Autrement dit $\forall x \in E, \quad \phi(x,.) \in E^*$.

Proposition 1.3 *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\phi: & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \phi(x,.) \end{array} \tag{1.5}$$

est linéaire.

Définition 1.5 *L'application linéaire φ_ϕ définit dans (1.5) est appelée l'application linéaire de E dans son dual associée à la forme bilinéaire symétrique ϕ. On écrit $\varphi_\phi \in \mathcal{L}(E, E^*)$.*

Si $dim(E) = n$ finie, et si $\mathcal{E}$ est une base de E, alors la matrice de ϕ dans E est égale à la matrice de ϕ_φ en menant E par la base $\mathcal{E}$ et E^* par la base duale $\mathcal{E}^*$.

Définition 1.6 (Noyau d'une forme bilinéaire) *Le noyau de la forme bilinéaire symétrique ϕ, qu'on note par $Ker(\phi)$ est le noyau de ϕ_φ. Autrement dit*

$$Ker(\phi) := \{x \in E \ \mid \ \forall y \in E : \quad \phi(x,y) = 0\} \tag{1.6}$$

Définition 1.7 *La forme bilinéaire symétrique ϕ est dit non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.*

Définition 1.8 *Si E est de dimension finie, Le rang de la forme bilinéaire symétrique ϕ est le rang de l'application linéaire ϕ_φ, ou encore c'est le rang de la matrice de ϕ dans une base de E.*

Les quatre formes bilinéaires dans l'exemple 1.1 sont toutes non dégénérées, on peut facilement vérifier que leurs noyaux successifs sont tous réduits à zéro.

Proposition 1.4 *En dimension finie, une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ est non dégénérée si et seulement si sa matrice dans une base de E est inversible. Autrement dit son determinant est non nul.*

Proposition 1.5 *Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $E \times E$. Alors, pour tout forme linéaire $\psi \in E^*$, il existe un unique $x \in E$ tel que*

$$\forall y \in E : \quad \psi(y) = \phi(x, y).$$

1.3 Orthogonalité

Dans tout ce paragraphe, on supposera que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, où E est un k-espace vectoriel.

Définition 1.9 *Soit F un sous espace vectoriel de E. L'orthogonal de F pour ϕ est le sous espace vectoriel de E défini par*

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F \quad \phi(x, y) = 0\}. \tag{1.7}$$

Exemple 1.3 *Pour le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$, l'orthogonal d'une droite vectorielle $\mathcal{D}$ est le plan vectoriel $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ au sens usuel.*

Remarque 1.2 *Le lien entre l'orthogonalité et la dualité se fait grâce à l'application linéaire* (1.5) *associée à ϕ.*

Théorème 1.1 *On suppose que E estun espace vectoriel de dimension finie n, on a :*

1. *Si ϕ est non dégénérée, alors*
$$dim(F^\perp) = n - dim(F).$$
2. *En général*
$$dim(F^\perp) = n - dim(F) + dim(F \cap ker(\phi)).$$

Proposition 1.6 *Soit F un sous espace vectoriel de E.*
En général on a $F \subset (F^\perp)^\perp$.
Mais, si $dim(E) = n$ finie et ϕ est non dégénérée, on a $F = (F^\perp)^\perp$.

2 Formes quadratiques

Dans cette section ; on supposera que le corps k est de caractéristique différente de 2 et E un espace vectoriel sur k.

2.1 Définitions et généralités

Définition 2.1 *L'application $q : E \to k$ est une forme quadratique sur E, s'il existe une forme bilinéaire symétrique $\phi : E \times E \to k$ telle que*

$$\forall x \in E : \quad q(x) = \phi(x, x).$$

On dit que q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique ϕ.

Revenons aux quatre formes bilinéaires vues dans l'exemple 1.1, leurs forme quadratiques successives associées sont :

1. $$q : k \to k, \quad x \mapsto x^2.$$

2. $$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2.$$

3. $$q : \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)^2 dt.$$

4. $$q : \mathcal{M}_n(k) \to k, \quad A \mapsto trace(A^2).$$