Examen de rattrapage à distance "Algèbre 3"

$9h00 \rightarrow 15h00$

Exercice 1 *(8 pts)*

Soit $E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions infiniment continues et dérivables. Soit

$$D: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ f(x) & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

1. *Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme D.*
2. *Déterminer les sous espaces propres associés aux valeurs propres.*

Exercice 2 *(12 pts)*

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont sa matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \frac{\alpha}{2} \\ 3 & \alpha & 0 \\ \alpha & -\alpha & \frac{-\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

1. *Calculer $det(A)$ et en déduire les valeurs de α pour que A soit inversible.*
2. *Donner la formule de l'inverse d'une matrice.*
3. *Par la suite, on pose $\alpha = -2$*
   (a) *Calculer l'inverse de la matrice A par la formule de l'inverse.*
   (b) *Calculer $P_f(\lambda)$ le polynôme caractéristique de f.*
   (c) *Calculer $P_f(3)$, $P_f(-3)$, $P_f(4)$ et $P_f(-4)$.*
   (d) *En déduire les valeurs propres de f.*
4. *Est ce que l'endomorphisme f est diagonalisable ?*
5. *On pose $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$*
   (a) *Trouver les sous espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ et E_{λ_3} en donnant leurs dimensions et leurs bases successifs.*
   (b) *Écrire la matrice A sous la forme $P^{-1}DP$.*
   (c) *Donner l'expression de A^k en fonction de k, $(k \in \mathbb{N})$.*
   (d) *Calculer $Tr(A^k)$ la trace de la matrice A^k en fonction de k.*
6. *En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, Trouver l'inverse de A.*

NB :

1. **Le corrigé de l'examen doit être clairement rédigé et scanné en un seul fichier** pdf **et envoyer à l'adresse email : b.benzeghli@univ-batna2.dz avant 15h00.**
2. **Dans la case "Objet" de l'email, l'étudiant doit mentionner 'Examen de Rattrapage d'Algèbre 3'.**
3. **Dans le corps de l'email l'étudiant doit mentionner son nom, prénom et groupe.**
4. **Tout email après 15h00 ne sera pas accepter.**
5. **Deux copies avec des erreurs identiques seront notées** $\frac{00}{20}$**.**

Dr. BENZEGHLI Brahim
b.brahim@univ-batna2.dz