Série de TD N^0 1
- Révision -

Exercice 1

Donner un système d'équation pour les sous-espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :

1. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
2. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
3. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Exercice 2

Donner un système générateur pour les espaces sous-vectoriels suivants

1. $E = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$
2. $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 et 2x - y - z = 0\}$

Exercice 3

Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -x+2y+2z) \end{array}$$

1. *Montrer que u est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de u.*
3. *En déduire $dim(ker(u))$ et $dim(Im(u))$.*

Exercice 4

Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-y, -3x+3y) \end{array}$$

1. *Montrer que u est une application linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de u.*
3. *Est-ce-que u est injective ? surjective ? Justifier.*

Exercice 5

Soit l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-z, 2x+y-3z, -y+2z) \end{array}$$

et soit (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Calculer* $f(e_1), f(e_2)$ *et* $f(e_3)$.
2. *On pose* $f_i = f(e_i),\ \ \forall i \in \{1,2,3\}$. *Déterminer les coordonnées de* f_1, f_2 *et* f_3 *dans la base canonique.*
3. *Trouver une base pour le noyau de* f *et une base pour l'image de* f.

Exercice 6

Soit l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y) \end{array}$$

et soit (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Montrer qu'il existe un vecteur* $a \in \mathbb{R}^3$ *non nul, tel que* $ker(f) = vect(a)$.
2. *Soient* $b = e_1 + e_2$ *et* $c = e_2 - e_3$;
   (a) *Calculer* $f(a), f(b)$ *et* $f(c)$.
   (b) *Montrer que* $Im(f) = vect(b,c)$.
3. *Est-ce-que* $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$? *Justifier.*