Série de TD N^0 2

Semestre 3 —– 2019-2020

Exercice 1

1. *Déterminer la formes linéaires f , g et h de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\begin{array}{lclcl} f(1,1,1)=0 & , & f(2,0,1)=1 & , & f(1,2,3)=4 \\ g(-1,0,1)=1 & , & g(2,0,1)=0 & , & g(2,2,3)=2 \\ h(1,3,0)=0 & , & h(2,0,-1)=-1 & , & h(1,0,2)=-2 \end{array}$$

2. *Donner des bases pour les noyaux de f, g et h.*

Exercice 2

Soient f_1 et f_2 deux éléments de $(\mathbb{R}^2)^*$ définis par

$$f_1(x,y)=x+y \quad et \quad f_2(x,y)=x-y$$

1. *Montrer que $\mathcal{F}=(f_1,f_2)$ forme une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.*
2. *Exprimer les formes linéaires suivantes dans $\mathcal{F}$:*

$$g(x,y)=x, \quad h(x,y)=2x+6y, \quad t(x,y)=-y, \quad k(x,y)=-3x+5y.$$

Exercice 3

Soit $E=\mathbb{R}^5$ muni de la base canonique $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$.

Soit $F=vect(v_1,v_2,v_3,v_4)$ tels que $v_1=(1,0,2,0,3)$; $v_2=(2,0,1,0,-1)$; $v_3=(-1,0,1,0,2)$ et $v_4=(-1,0,4,0,9)$.

1. *Déterminer le rang de F.*
2. *Déterminer une base de F, sa dimension et un supplémentaire[1] dans E.*

Exercice 4

Dans $E=\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, on pose

$$F=\{(x,y,z,t)\in E \mid x+y-z-t=0\}$$

1. *Justifier que F est un hyperplan.*
2. *En déduire sa dimension.*
3. *Donner toutes les equations de F.*
4. *Donner une base de F.*
5. *Donner tous ses supplémentaires.*

Exercice 5

Dans $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base canonique $\mathcal{B}=\{1,X,X^2\}$, on pose

$$F=\{P\in E \mid P(1)+P'(0)=0\}$$

1. *Justifier que F est un hyperplan.*
2. *En déduire sa dimension.*
3. *Donner toutes les equations de F.*
4. *Donner une base de F.*
5. *Donner tous ses supplémentaires.*

---

1. Un supplémentaire d'un sous espace vectoriel F de E est un sous espace vectoriel de E tel que $F\oplus G=E$.